

Matemáticas VI



Matemáticas VI

Rosa Isela Ríos Hernández



Dirección General de Bachillerato



GOBERNADOR CONSTITUCIONAL DEL ESTADO DE VERACRUZ
DE IGNACIO DE LA LLAVE

Fidel Herrera Beltrán

SECRETARIO GENERAL DE GOBIERNO

Reynaldo G. Escobar Pérez

SECRETARIO DE EDUCACIÓN DE VERACRUZ

Víctor A. Arredondo Álvarez

SUBSECRETARIO DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR

Rafael Ortiz Castañeda

DIRECTORA GENERAL DE BACHILLERATO

Denisse Uscanga Méndez

SUBDIRECTORA ACADÉMICA

Carolina Loyo Iparraguirre

SUBDIRECTOR ADMINISTRATIVO

Rolando Rivera Vargas

COORDINACIÓN GENERAL

Mauro Morales Arellano

ASESORÍA ACADÉMICA

María Angélica Trejo Gamboa

ASESORÍA PEDAGÓGICA Y
CUIDADO DE LA EDICIÓN

Ana Silvia Guzmán Piedra

CORRECCIÓN

Norma Rivera Pérez

Alicia Mora Rodríguez

DISEÑO DE LA CUBIERTA

Jeniffer Jiménez Quezada

DISEÑO EDITORIAL

Traza Diseño

FORMACIÓN

Mario Jareda Meseguer

Primera edición: 2010

Derechos reservados 2010

Secretaría de Educación de Veracruz
Km. 4.5 carretera Xalapa-Veracruz
Xalapa-Enríquez, Ver.

ISBN 970-670-148-6 (Colección)

Registro en trámite

Impreso en México

INTRODUCCIÓN 7

UNIDAD I DIFERENCIALES E INTEGRAL INDEFINIDA

Evaluación diagnóstica 11

1.1 La diferencial 13

Definiciones de Δx y $f'(x) \Delta x$ 14

Interpretación gráfica de dy 15

Reglas de la diferenciación 18

La diferencial como aproximación del incremento 23

Errores pequeños 29

1.2 La integral indefinida 31

Antiderivadas 33

Constante de integración 35

Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales 36

Significado geométrico de la constante de integración 38

Significado físico de la constante de integración 41

La integral indefinida y las reglas para la integración inmediata de diferenciales algebraicas, exponenciales y trigonométricas 43

Integración por sustitución trigonométrica, de expresiones que contengan $\sqrt{a^2 - u^2}$; $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ 48

Aplicaciones en administración y economía: costo total, ingreso total, y utilidad total 53

Autoevaluación 57

UNIDAD II INTEGRAL DEFINIDA Y LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Evaluación diagnóstica 61

2.1 Integral definida 63

La noción de sumatoria 63

Área limitada por la gráfica de una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ 67

Concepto de integral definida mediante sumatorias de Riemman 71

2.2 Técnicas de integración 80

Cambio de variable 80

Integración por partes 90

Integración de potencias de funciones trigonométricas 94

Fracciones parciales 99

2.2.1 Denominadores con factores lineales 100

2.2.2 Denominadores con factores cuadráticos 103

Autoevaluación 108

UNIDAD III TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y LAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Evaluación diagnóstica 113

3.1 El teorema fundamental del cálculo y sus aplicaciones 114

Integración aproximada: regla trapezoidal y regla de Simpson 115

Área y área entre dos gráficas 121

3.2 Aplicaciones de la integral definida 134

Aplicaciones de la integral definida en situaciones propias de las ciencias naturales y sociales 140

Autoevaluación 142

BIBLIOGRAFÍA

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

INTRODUCCIÓN

Atendiendo a la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) y la Reforma Curricular 2007, ambas dirigidas hacia la calidad educativa, es necesario que los estudiantes en este nivel desarrollen la creatividad y el pensamiento lógico y crítico, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores a través de la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan esta parte de la formación propedéutica. Prepararlo para que logre responder en su ámbito escolar correspondiente o posible inserción al sector productivo y para su ingreso y permanencia en la educación superior, a partir de sus inquietudes y aspiraciones profesionales.

Conforme al Marco Curricular Común, la asignatura de Matemáticas IV enfocada al cálculo integral, corresponde al área físico matemática dentro del campo disciplinar de matemáticas, es el segundo de los dos cursos propedéuticos y su antecedente son los cuatro cursos de matemáticas correspondientes a la formación básica, durante ésta se buscó consolidar y diversificar los aprendizajes y desempeños adquiridos, ampliando y profundizando los conocimientos, habilidades, actitudes y valores relacionados con el campo de las matemáticas, promoviendo: en Matemáticas I, el uso de representaciones y procedimientos algebraicos para resolver situaciones de su entorno que impliquen el manejo de magnitudes variables y constantes; en Matemáticas II, con relación a magnitudes físicas o espaciales; en Matemáticas III, mediante el cambio y la equivalencia entre representaciones algebraicas y geométricas; en Matemáticas IV, mediante el empleo de diversos tipos de relaciones funcionales; y en el primer curso propedéutico de Matemáticas V, con el cálculo de la derivada y sus aplicaciones.

Específicamente, la asignatura de Matemáticas VI permitirá al estudiante utilizar distintos procedimientos para determinar el área bajo una curva y la aplicación en diversos problemas concernientes con: errores cometidos en mediciones, leyes del movimiento, costo total, ingreso total y utilidad total, esto durante cierto periodo, etcétera.

Esta asignatura está organizada en tres unidades, con el objeto de facilitar la formulación y/o resolución de situaciones o problemas de manera integral y de garantizar el desarrollo gradual y sucesivo de distintos conocimientos, habilidades, valores y actitudes, en el estudiante, enumerándose como: unidad I Diferenciales e integral indefinida; unidad II Integral definida y los métodos de integración y la unidad III: Teorema fundamental del cálculo y las aplicaciones de la integral definida.

En la unidad I se inicia con el concepto de diferencial y se aborda: la integración como operación inversa de la derivación, la antiderivada, los tres significados de la constante de integración, las reglas de integración inmediata y la integración de expresiones que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$; $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. En la unidad II se extiende lo anterior al cálculo de la integral definida: por medio de las sumas de Riemman, introduciendo previamente el concepto de sumatoria; y a partir del cálculo de la primitiva se abordan los métodos de integración: cambio de variable, por partes, de potencias de funciones trigonométricas, fracciones parciales y de funciones racionales de seno y coseno. En la unidad III se estudia el área bajo la curva de una función mediante las reglas trapecial y de Simpson, y a través de la aplicación del teorema fundamental del cálculo, así mismo, se usa éste para calcular: la longitud de arco, área de la superficie de un sólido y el volumen.

A lo largo de las tres unidades se presentan aplicaciones de la integral en diferentes campos, como son: naturales, sociales, económicos, administrativos, etc. El enfoque educativo establece un conjunto de competencias, siendo éstas las competencias genéricas y, disciplinares básicas y extendidas en el campo de las matemáticas que deberán ser desarrolladas por los educandos al finalizar el ciclo y han servido de guía para la elaboración del presente libro de texto. En las siguientes tablas se marcan con el símbolo *, las que han de desarrollarse al término de cada unidad.

| Competencias genéricas del bachillerato general | Unidades | | |
|--|----------|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. | * | * | * |
| 2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros. | * | * | * |
| 3. Elige y practica estilos de vida saludables. | * | * | * |
| 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. | * | * | * |
| 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. | * | * | * |
| 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. | * | * | * |
| 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. | * | * | * |
| 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. | * | * | * |
| 9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo. | * | * | * |
| 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales. | * | * | * |
| 11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables. | * | * | * |

| Competencias disciplinares básicas y/o extendidas del campo de Matemáticas VI | Unidades | | |
|---|----------|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. | * | * | * |
| 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. | * | * | * |
| 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. | * | * | * |
| 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. | * | * | * |
| 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. | * | * | * |
| 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. | * | * | * |
| 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia. | * | * | * |
| 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. | * | * | * |

Si bien todas las asignaturas contribuirán al desarrollo de estas competencias genéricas y disciplinares, cada asignatura tiene una participación específica. Es importante destacar que la asignatura de Matemáticas VI contribuye ampliamente al desarrollo de estas competencias cuando el estudiante se autodetermina y cuida de sí, por ejemplo, al enfrentar las dificultades que se le presentan al resolver un problema y es capaz de tomar decisiones ejerciendo el análisis crítico; se expresa y comunica utilizando distintas formas de representación matemática (variables, ecuaciones, tablas, fórmulas, diagramas, gráficas) o incluso emplea el lenguaje ordinario, u otros medios (ensayos, reportes, investigaciones) e instrumentos (calculadoras, computadoras) para exponer sus ideas, (para este último es necesario que las gráficas requeridas a lo largo de cada unidad se realicen utilizando un programa de cómputo, el cual puede ser el laboratorio de funciones de la serie *Galileo* distribuido en los bachilleratos del estado, o bien, *graphmatica* que se encuentra en la red de forma gratuita); piensa crítica y reflexivamente al construir hipótesis, diseña y aplica modelos de funciones derivables e integrales, evalúa argumentos o elige fuentes de información al analizar o resolver situaciones o problemas de distintos campos científicos; aprende de forma autónoma cuando revisa sus procesos de construcción del conocimiento matemático (aciertos, errores) o los relaciona con su vida cotidiana; trabaja en forma colaborativa al aportar puntos de vista distintos o proponer formas alternas de solucionar un problema matemático (actividades); participa con responsabilidad en la sociedad al utilizar sus conocimientos matemáticos para proponer soluciones a problemas de su localidad, de su región o de su país.