Relaciones y funciones

UNIDAD 1

OBJETIVO

El estudiante:

- Resolverá problemas teóricos o prácticos sobre relaciones y funciones, mediante el manejo de la relación funcional entre dos variables, la realización de operaciones entre funciones, el uso de funciones inversas, funciones especiales y las transformaciones de gráficas, en un ambiente escolar que favorezca la reflexión y el razonamiento abstracto, lógico, analítico, así como el desarrollo de actitudes de responsabilidad, cooperación, iniciativa y colaboración hacia el entorno en el cual se desenvuelve.

Competencia genérica a desarrollar:
Realiza innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

Competencias disciplinares a desarrollar:

- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de esta unidad descubrirás lo maravilloso que es la explicación del mundo a través de la relación entre dos variables. Encontrarás que una de éstas afecta a la otra, produciéndole variaciones y repercutiendo directamente en su comportamiento. Además, identificarás cómo las matemáticas en forma organizada y metódica, establecen reglas, clasificaciones, interpretaciones, representaciones y de qué forma obtienen información de este saber matemático al que denominamos funciones.

Evaluación diagnóstica

NOMBRE DEL ALUMNO: ____

GRUPO: __________ NÚMERO DE LISTA: ________ ACIERTOS: __________

INSTRUCCIÓN: Contesta brevemente lo que se pide.

1. ¿Qué entiendes por relación de dos variables?

____

____

2. ¿Qué es una función?

____

____

3. Halla el valor de x en la siguiente ecuación:
   a) $2x+3=0$

4. Localiza en un plano cartesiano los siguientes pares coordenados y únelos con una línea:

x	y
–3	–10
–2	–7
–1	–4
0	–1
1	2
2	5
3	6

5. ¿Cuál crees que es la expresión algebraica que te permite calcular esos puntos?

____

____

1.1 RELACIONES Y FUNCIONES

1.1.1 Noción de relación y noción de función

Un concepto fundamental en las matemáticas es el de función. Para su mejor comprensión, iniciaremos explicando la idea de conjunto.

Definición

Conjunto: Colección de objetos con una regla que indica si un objeto dado pertenece o no a la colección.

Ejemplo

a) El conjunto de alumnos de la Escuela de Bachilleres Vespertina "Veracruz", en Xalapa.
b) El conjunto de libros de Matemáticas IV en el estado de Veracruz.
c) El conjunto de números naturales.

Denotamos a los conjuntos con letras mayúsculas (por ejemplo: A, B) y sus elementos con letras minúsculas (por ejemplo: x, y). A es subconjunto de B, si todo elemento de A es también elemento de B; por ejemplo, el conjunto de veracruzanos es un subconjunto del conjunto de mexicanos.

En la vida diaria encontramos con frecuencia correspondencias o asociaciones, en donde elementos de dos conjuntos A y B están relacionados entre sí. Es así que nace la idea de relación.

Definición

Se llama *relación* entre dos conjuntos A y B a un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ que cumple una regla.

Ejemplo

a) Sea A el conjunto de hijos y B el conjunto de padres. Cada elemento de A está relacionado con un elemento de B; es decir, cada hijo se relaciona con su padre.
b) Sea A el conjunto de alumnos del Colegio Preparatorio de Xalapa y B el conjunto de promedios. A cada alumno le corresponde un promedio.
c) Sea A el conjunto de familias de la colonia Unidad Veracruzana y B el conjunto de casas, entonces a cada familia le corresponde una casa.
d) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{x \mid x \in \text{enteros} \geq 2\}$ hallar la relación R con la regla "es la mitad de".
   Solución: $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$.

Dentro de las relaciones existe una dependencia a la que se llama función; así, toda función es una relación, pero no toda relación es una función, ya que esta última debe cumplir con ciertas propiedades que expondremos a continuación.

Definición

Función: Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una relación que asocia cada elemento x ∈ A con un único elemento y ∈ B. Dicho de otra manera, es una relación donde la asociación entre dos conjuntos se da de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponda uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

Notación: f: A →B   Léase: “función f de A a B”.

Las funciones y relaciones se indicarán por cualquier letra o símbolo, por ejemplo f, F, **Ω**, γ, etc., como en $F(x)= x^2$, $\gamma(x)= x+1$

De acuerdo con su definición, una función se compone de varias partes. Éstas son:

Definición

Dominio: Es el conjunto de elementos de A.
Argumentos: Son los elementos del dominio.
Codominio o contradominio: Es el conjunto de elementos de B.
Imágenes: Son los elementos del codominio que están asociados con algún argumento.
Rango: Es el conjunto del codominio que contiene a todas las imágenes de la función. Puede coincidir con el codominio.

Cuando utilizamos funciones hablamos de una relación de dependencia, donde la imagen de un argumento x bajo f, es una variable dependiente, ya que su valor está sujeto del asignado al argumento. Por ejemplo, la fórmula $P= \pi d$ para el perímetro de un círculo de diámetro d, asigna para cada real positivo d un único valor P.

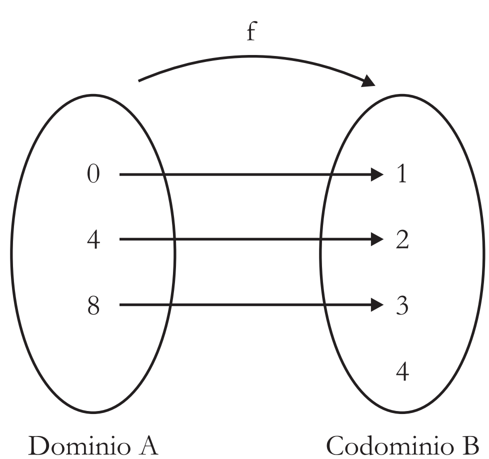
El diámetro d es un número arbitrario en el dominio de la función, llamado variable independiente, mientras que P, el perímetro, representa un número en el codominio de f y se llama variable dependiente. Su valor depende de d; se dice entonces que “P está en función de d”.

Cuando hablamos de relación, las variables que indican la regla de correspondencia son *x* y *y*. Esta relación se describe mediante la igualdad $y = f(x)$

Ejemplo

Dominio={0, 4, 8}; los elementos 0, 4, 8 son argumentos, codominio={1, 2, 3, 4}. Los elementos 1, 2, 3 son imágenes y rango={1, 2, 3}

Los símbolos *f* y *f*(*x*) (se lee f de x) son diferentes; f se utiliza para representar a la función y f(x) es un elemento del codominio de la función, es aquel elemento que f asigna a x. Para el ejemplo 3, f(0)=1 bajo la función f.



Definición

Dominio de una función: Sea $y = f(x)$ una función; se le llama dominio de la función al conjunto de valores de x para los que $y = f(x)$ está definida. En algunas ocasiones se le representa como D.

Dada la fórmula de una función, para el cálculo del dominio se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. No dividir entre cero $\frac{5}{0}, \frac{x}{0}$

2. No extraer raíces cuadradas, cuartas o sextas; es decir, raíces pares con el radicando negativo; ejemplos: $\sqrt{-3}, \sqrt[4]{-9}$. Sin embargo, obtener raíces con el radicando negativo sí es posible si la raíz es impar, como en las raíces cúbicas y quintas. Ejemplos: $\sqrt[3]{-8} = -2,\ 5\sqrt{-243} = -3$.

3. No es posible calcular logaritmos de números negativos, ni de cero.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 + 1$. Obtener las imágenes de la función para los argumentos dados y señalar el dominio y rango de la función f(1), f(2), $f\left(\sqrt{3}\right)$.

Solución: $f(1) = (1)^2+1=2$
$f(2) = (2)^2+1=5$
$f\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1 = 4$

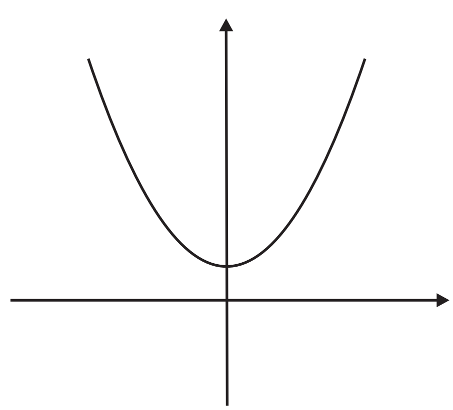
Dominio=$\{1, 2, \sqrt{3}\}$, rango=$\{2, 5, 4\}$

Ejemplo

Ahora para la misma función, el caso general.

Sea $f(x) = x^2 + 1$ una función. Calcular el dominio y contradominio de f.

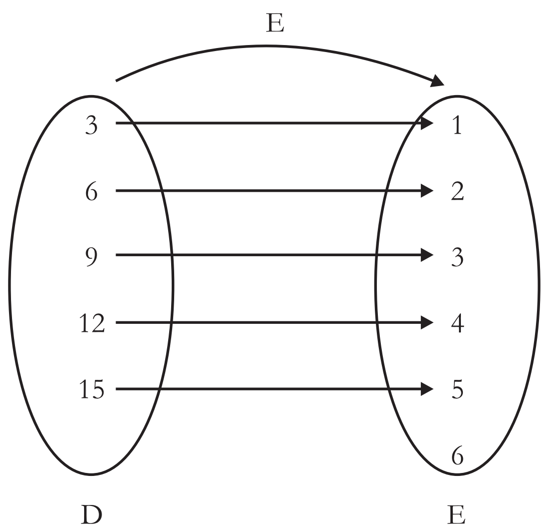
Solución: el dominio se compone de todos los reales, ya que cualquiera que sea el valor real asignado a x, la función está definida. Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, el codominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.



1.1.2 Diversas formas de representación de una función

A lo largo de cursos anteriores habrás estudiado funciones sin tener la certeza o el conocimiento preciso de que lo son. Por eso es importante que una función se pueda representar de diversas maneras: sagital, gráfica y analítica, tabular.

Sagital: En ésta representación, se hace uso de conjuntos en los cuales se muestra claramente la relación entre los elementos del dominio y codominio.



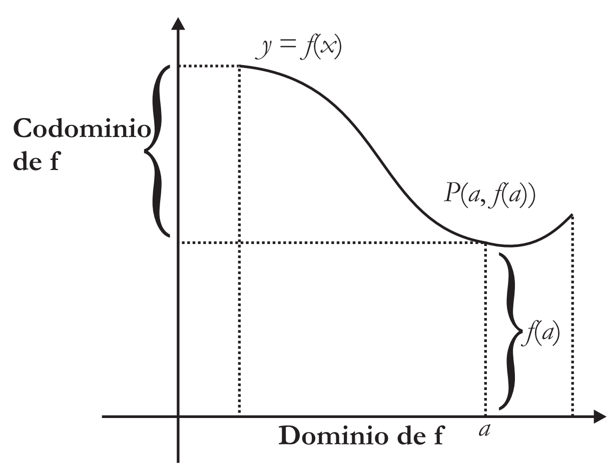
El dominio es el conjunto D={3, 6, 9, 12, 15}, el codominio es el conjunto E={1, 2, 3, 4, 5, 6}, el rango={1, 2, 3, 4, 5} y la regla de correspondencia "el triple de".

Gráfica: En ella, se hace uso de pares ordenados de la forma (x, y) en el plano cartesiano, donde x es el argumento y y es la imagen bajo la función.

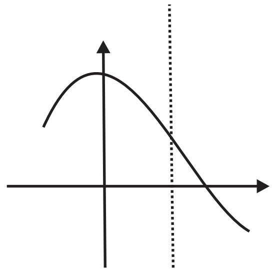
La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f.

Es importante observar que hay un único f(a) para cada a del dominio, y sólo hay un punto de la gráfica que tiene abscisa a.

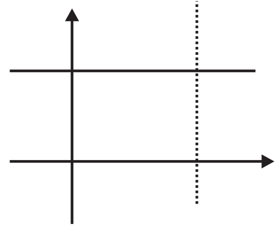
De aquí se concluye que toda recta vertical corta a la gráfica de una función en uno y sólo un punto.



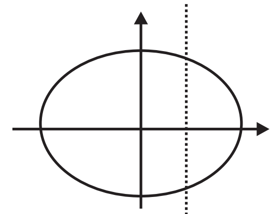
Ejemplo



Es función



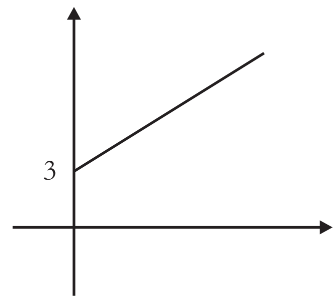
Es función



No es función

Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2x + 3$

x	f(x)
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11

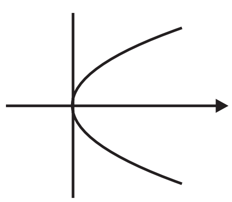


Con la tabla anterior se construyen las parejas ordenadas (0, 3), (1, 5), (2, 7), … De esta manera, la función se representa gráficamente como se ilustra en la figura.

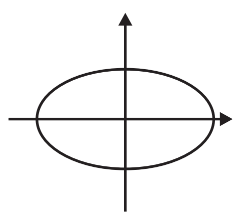
Ejercicio

Probar si el siguiente conjunto de puntos en el plano *xy* corresponde a gráficas de funciones o relaciones.

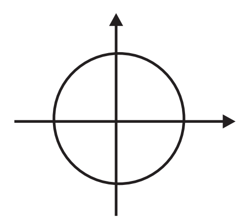
1.



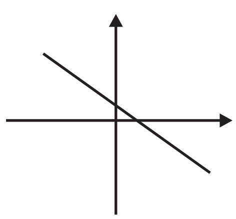
2.



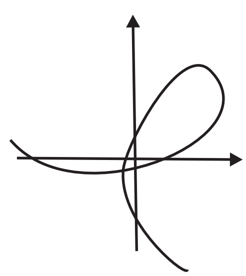
3.



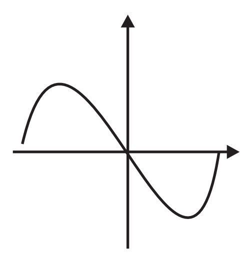
4.



5.



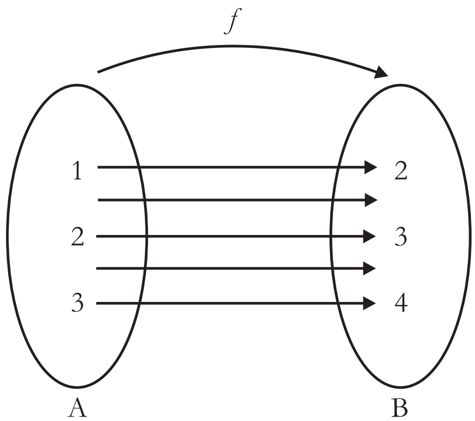
6.



René Descartes
Nació el 31 de marzo de 1596 en la Haye, en Touraine. Fue educado por su abuela, ya que su madre murió al año de su nacimiento; desde muy chico aprendió latín y griego. Estudió en la universidad de Poitiers derecho y algo de medicina. Murió a la edad de 53 años de neumonía el 11 de febrero de 1650 en Estocolmo.
Continua.

7. Si A={x | x ∈ {1, 3, 5, 7, 9}} y B={y | y ∈ {2, 4, 6, 8}}, hallar la relación L tal que x>y

8. Establecer la regla de correspondencia para la siguiente función.



9. Señalar cuál es la regla de correspondencia, dominio y rango de la siguiente relación.
R={(1,1), (2,4), (3,9), (4, 16)}

10. Sean A={2, 4, 6, 8}, B={2, 6, 10, 714, 18}. Hallar la relación R con la regla de correspondencia "es el duplo disminuido en 2", el dominio, codominio y rango.

11. Sea $f(x) = x^3 + 2x - 2$. Calcular f(0), f(2), f(-1).

12. Sea $g(x) = \sqrt{x+2}$. Calcular g(1), g(2), g(7).

13. Determinar para los siguientes casos si se trata de una función.

a) Los pares ordenados: (-3, 1), (-2, 3), (-1, 5), (0, 7), (-2, 9).
b) Los pares ordenados: (2, 1), (1, 2), (3, 2), (4, 3).

14. Encontrar el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{9 - x^2}$

b) $y = \dfrac{1}{x-4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{5x^2 - 3x - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{3-x}}$

Una de sus principales aportaciones a las matemáticas fue la sistematización de la geometría analítica. Fue el primero en utilizar las primeras letras para identificar a las cantidades conocidas; y las últimas letras del abecedario para identificar a las cantidades desconocidas, fue el primero en intentar clasificar a las curvas utilizando como base la ecuación que las produce.
Siempre fue muy delicado de salud, así que un día que estaba postrado en la cama de su dormitorio viendo volar a una mosca, se le ocurrió que podría determinar la posición de la mosca en cada instante conociendo la distancia con respecto a dos planos perpendiculares; determinó que cualquier punto en el plano quedaba definido por su distancia perpendicular a dos líneas perpendiculares llamadas ejes. Con esto nació la geometría analítica, estableciendo una relación entre el algebra y la geometría, ya que este proceso no solo permitía encontrar diversos puntos en el plano, sino relacionar a una curva con una ecuación que permitiera encontrar las coordenadas de cada punto de ésta.
Basó sus estudios en la filosofía, las matemáticas, la óptica, la física, la astronomía, la anatomía y la medicina.

Analítica*:* Es la representación de una función donde se relaciona un par de variables por medio de una expresión algebraica:

$y = 4x$ $\qquad f(x) = \dfrac{5}{x}$ $\qquad g(t) = 5t^2$

La relación entre los elementos del dominio y el contradominio queda incluida en el conjunto de números reales que satisfagan la ecuación.

Dominio de la función dada su forma analítica

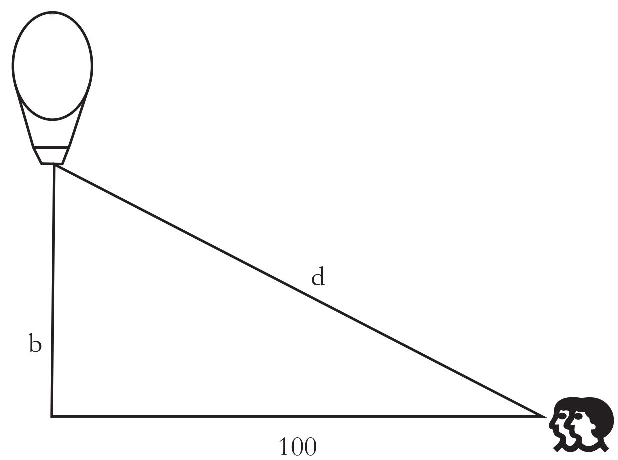
El dominio y codominio de una función en su forma analítica será todo número real, excluyendo aquellos que no indiquen relaciones con números reales. Por ejemplo:

- Raíces pares con radicando negativo $\left(\sqrt{-9}\right)$
- Raíces del denominador de una función, donde éste es cero $\left(\dfrac{3}{0}\right)$.

Ejemplo

Uno de los problemas prácticos en el que se aplica el término de función es el siguiente:

Un globo de aire caliente se suelta a las 2 pm y se eleva verticalmente a razón de 4 m/s. Un punto de observación está situado a 100 m del punto en el suelo que se encuentra ubicado directamente abajo del globo (ver fig.). Sea *t* el tiempo (en segundos) transcurrido a partir de las 2 pm, expresar la distancia d del globo al punto de observación como una función de *t*.



Solución: Por el teorema de Pitágoras: $b = 4t$

$d = 4\sqrt{625 + t^2}$

Distancia = velocidad x tiempo

$b = 4t$

$d = \sqrt{(100)^2 + (4t)^2}$

$d = \sqrt{10000 + 16t^2}$

$d = \sqrt{16(625 + t^2)}$

$d = 4\sqrt{625 + t^2}$

Es así como queda representada la distancia como una función del tiempo.

Ejercicio

Determinar el dominio de las siguientes funciones y exponerlo de manera gráfica.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

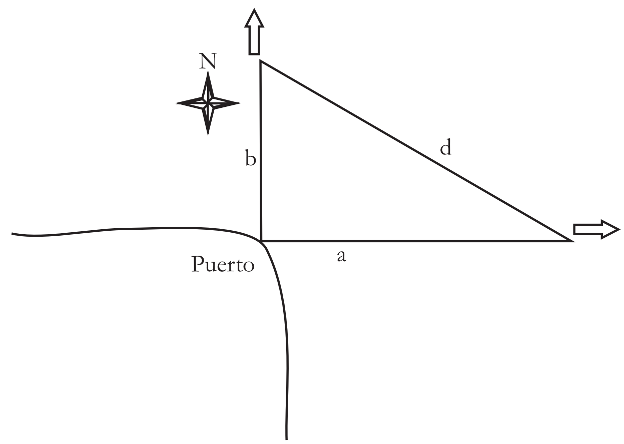
2. $f(x)=5x-\sqrt{x}$

Sea f una función que va de R → R calcular el rango de f.

3. $f(x) = 3$

4. $4x + 3$

5. Dos barcos zarpan al mismo tiempo de un puerto. Uno viaja hacia el este a 15 min/h y el otro hacia el norte a 10 min/h. Sea t el tiempo (en horas) después de la salida, expresar la distancia d entre las embarcaciones como una función de t.



6. Se trata de construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón cuadrada de lado x con una altura de 2 cm. Esta altura se logra cortando cuadrados de 2 cm de lado en cada esquina de la hoja de cartón y doblando las pestañas hacia arriba. Calcular el volumen de la caja en función de x y su dominio.

1.2 CLASIFICACIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

1.2.1 TIPOS DE FUNCIONES

Para poder estudiar y entender las funciones, existen tres criterios de clasificación: según la presentación de su forma analítica, según el tipo de expresión que aparece en su forma analítica y según la correspondencia entre sus conjuntos.

1. **Según la presentación de su forma analítica**

Según este criterio se clasifican en explícitas e implícitas. La función es explícita cuando se presenta despejada la variable dependiente.

La función es implícita cuando en la ecuación que la representa aparecen mezcladas las variables dependiente e independiente.

Ejemplo

Expresión	Clasificación forma analítica
$y = 9x + 8$	Función explícita
$y = 4x^3 + x^2 - 2$	Función explícita
$x^2 + 2xy + y^2 = 5xy^2$	Función implícita
$4x - y + 2 = 0$	Función implícita

Para algunos casos es fácil pasar de una forma a otra. Por ejemplo, en su forma implícita, $y + 2x = 5$ al pasar a su forma explícita quedaría: $y = 5 - 2x$, haciendo $y = g(x)$, $g(x) = 5 - 2x$. La forma analítica que presente una función depende de la naturaleza del problema.

2. **Según el tipo de expresión que aparece en su forma analítica.**

El tipo de expresión que aparece en la regla de correspondencia de una función es lo que le da el nombre. De esta manera, se clasifican en:

- Funciones
  - Algebraicas
    - Constante
    - Identidad
    - Lineal
    - Cuadrática
    - Cúbica
    - Polinomial
    - Racional
    - Irracional
  - Trascendentes
    - Logarítmicas
    - Exponenciales
    - Trigonométricas
      - Seno
      - Coseno
      - Tangente
      - Cotangente
      - Secante
      - Cosecante

Algunas de estas funciones se abordarán a fondo en las próximas unidades.

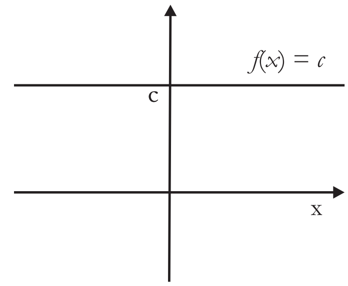
Funciones algebraicas

Una función algebraica es aquélla que puede expresarse en términos de sumas, restas, cocientes, productos y raíces de polinomios.

Ejemplo

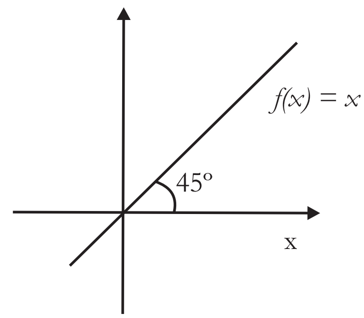
$$f(x) = 4x^7 + 3\sqrt[5]{x} + \frac{x^2(x+1)}{\sqrt{x^3}}$$

Función constante



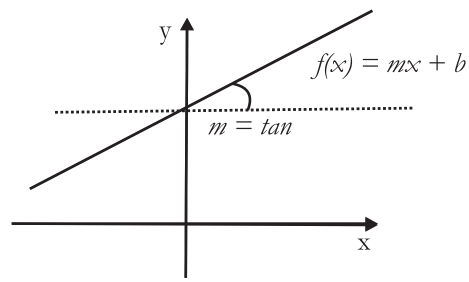
La función constante es de la forma $f(x) = c$, c es constante; su gráfica es una recta horizontal paralela al eje X separada por una distancia c del eje. Su dominio es todo el eje real; la imagen de todos los argumentos x es . Ejemplo: s(x)=5

Función identidad



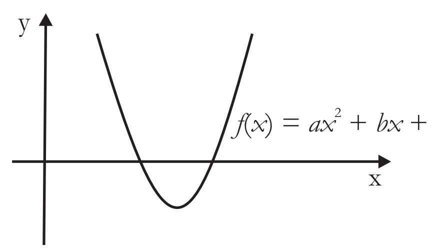
Tiene la forma $f(x) = x$. Su gráfica es una recta que pasa por el origen formando un ángulo de 45° respecto al eje X. Se puede prolongar en cualquier sentido de manera infinita; el dominio y contradominio de la función es R. Para todo argumento, su imagen es sí mismo.

Función lineal



Tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes. Es una recta de pendiente m y ordenada al origen b. El dominio de la función son los valores reales. Ejemplo: $f(x) = 5x + 2$

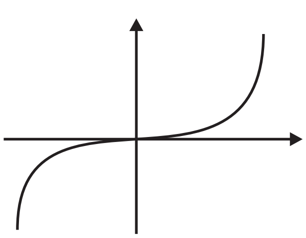
Función cuadrática



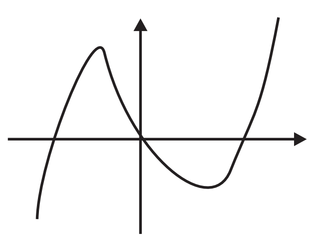
Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Es una parábola con eje de simetría vertical. Su dominio son los valores reales.

Función cúbica

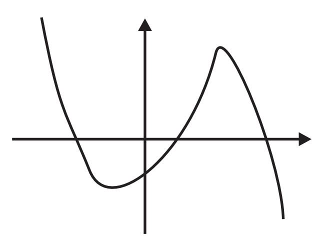
Su expresión analítica es un polinomio de tercer grado de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. La forma de su gráfica depende de los parámetros a, b, c y d.



$f(x) = x^3$



$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
a > 0



$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
a > 0

Función polinomial de grado n

Este tipo es para casos particulares n = 0, 1, 2 …; tiene la forma: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $a_n \neq 0$, donde a_0, a_1, ... a_n son sus parámetros. Su gráfica depende de los valores de éstos. El dominio para una función polinomial es R. Acerca de esta función se profundizará más en la unidad 2. Ejemplo: $h(x) = 9x^5 + 5x^4 + x^3 - 2$

Función racional

Está formada por el cociente de dos polinomios, es decir:

$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ como polinomios y $q(x) \neq 0$

El dominio es R, excepto las raíces o ceros del denominador, en donde éste se anula. Esta función se explicará con mayor detalle en la unidad 3.

Ejemplo

La siguiente es una función racional $s(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{(x-2)(x+3)}$

El dominio de s se forma de todos los números reales excepto 2 y –3, para los cuales se anula el denominador.

Función irracional

Su expresión analítica posee expresiones algebraicas no racionales. Las funciones de este tipo generalmente tienen radicales.

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$
$$f(x)=1+3x\sqrt{x-2}$$

Funciones trascendentes

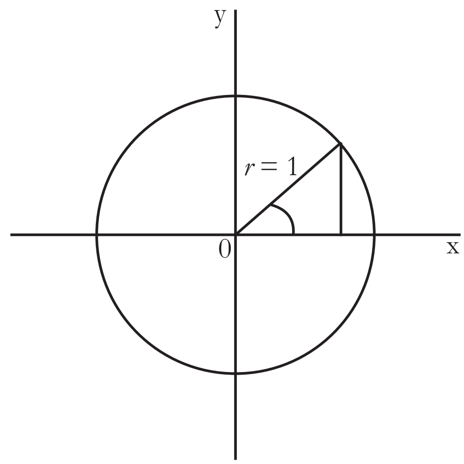
Entre las funciones trascendentes se encuentran las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Las funciones trigonométricas las estudiaste con detalle en Matemáticas II, y ahora se abordarán de manera breve. Los dos últimos tipos de función serán motivo de estudio en la unidad IV.

Funciones trigonométricas

La trigonometría es una rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.

Las funciones trigonométricas son: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cosecante (csc), secante (sec) y cotangente (cot).

Normalmente se usan dos métodos para definir las funciones trigonométricas: mediante una circunferencia unitaria y por medio de triángulos rectángulos.



Consideremos el círculo unitario de la derecha para definir las funciones trigonométricas.

A medida que el punto P recorre la circunferencia, el ángulo que forman el radio del círculo y el eje x varía, y se puede asociar a cada valor del ángulo un valor de cada uno de los cocientes siguientes:

Definición

Las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera son:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}\frac{r}{y} = \frac{1}{y}$$

Estas funciones son periódicas, con periodo 2π, ya que al recorrer toda la circunferencia con el punto P, se llega al punto inicial.

En la función seno, su dominio son los números reales y su rango son todos los números reales, tales que $-1 \leq y \leq 1$

En la función coseno, su dominio son todos los números reales y su rango son todos los números reales, tales que $-1 \leq y \leq 1$

En la función tangente, su dominio de definición son todos los números reales distintos de $\frac{n\pi}{2}$ con $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5...,$ y su rango está formado por todos los números reales.

La función cotangente tiene como dominio de definición a todos los números reales distintos de $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots,$ y su rango está formado por todos los números reales.

La función secante tiene como dominio de definición a todos los números reales distintos de $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}...$ y su rango son todos los números reales, excepto los del intervalo (-1,1).

La función cosecante tiene como dominio de definición a todos los números reales distintos de 0, $\pm\pi$, $\pm2\pi$, $\pm3\pi$..., y su rango son todos los números reales, excepto los del intervalo (-1, 1).

Funciones trigonométricas inversas

Se definen asociando a cada valor de los cocientes ya mencionados, el valor del ángulo correspondiente. Éstas son:

Función	Dominio	Contradominio
$x = arc\ sen\ y$* o $x = sen^{-1}y$	[–1, 1]	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x = arc\ cos\ y$ o $x = cos^{-1}y$	[–1, 1]	[0, π]
$x = arc\ tan\ y$ o $x = tan^{-1}y$	{R}	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$x = arc\ cot\ y$ o $x = cot^{-1}y$	{R}	(0, π)
$x = arc\ sec\ y$ o $x = sec^{-1}y$	{complemento de (–1, 1)}	(0, π]
$x = arc\ csc\ y$ o $x = csc^{-1}y$	{complemento de (–1, 1)}	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

* Se lee "arco seno de", y lo correspondiente para las otras funciones. No se debe confundir el símbolo -1 que indica una función inversa con el exponente -1. Entonces:

$$sen^{-1}x \neq (senx)^{-1}$$

Esto lo podemos observar en las gráficas de cada una de las funciones inversas.

Ejercicio

Identificar la clase a la que pertenecen las siguientes funciones algebraicas.

1. $f(x) = -1$
2. $f(x) = 5x^5 + 9$
3. $f(x) = 2x^2 + x - 2$
4. $f(x) = 3x$
5. $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
6. $f(x) = \frac{2 - x}{x}$
7. $r(x) = x^3 + x$

Graficar y señalar cuál es el dominio y contradominio de las funciones 1 – 7.

Evalúar las siguientes funciones en los puntos indicados:

8. $f(\theta) = sen(\theta) + 2\ tan\ (\theta),\ \theta = \frac{\pi}{2}$

9. $f(x) = \frac{1}{3} cos x,\ x = \frac{9\pi}{2}$

10. $f(x) = 2tan\ x + 3,\ x = \frac{5\pi}{4}$

Calcular los valores de las funciones trigonométricas en:

11. $\alpha = 0$

12. $\alpha = \frac{\pi}{2}$

13. $\alpha = \pi$

Calcular el valor del ángulo para cada uno de los siguientes casos:

14. $sen\ \theta = 1$

15. $cos\theta = \frac{1}{2}$

16. $tan\ \alpha = -1$

17. $sen\ \theta = .7071$

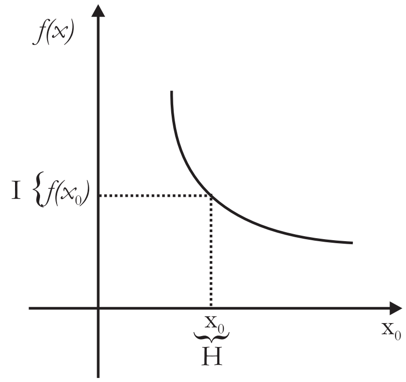
Funciones continuas y discontinuas

En ocasiones, al dibujar la gráfica de una función es necesario "despegar el lápiz del papel". En otras ocasiones esto no hace falta, puesto que se sigue un trazo continuo. Esta idea tan sencilla es de gran importancia: se trata de la continuidad de una función.

Una función f es continua en el punto x_0 si:

a) a pertenece al dominio de la función f.
b) Dado un intervalo I de $f(x_0)$, existe un intervalo H de x_0 tal que la imagen de H está contenida en I, es decir, H tal que $f(H) \subset I$; de lo contrario, f es discontinua en el punto x_0.

Definición



Si la función f no es continua en x_0, no existe el intervalo H.

Si f es continua en todos los puntos de su dominio, se llama función continua.

Los polinomios son funciones continuas en todos los números reales, en tanto que las funciones racionales son continuas en los reales, excepto para los valores en que se anule el denominador.

Así, las funciones continuas cumplen con lo siguiente:

1. En el gráfico de cualquier polinomio, cualquier par de puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ se unen por un arco continuo.

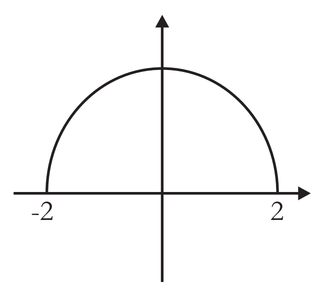
2. Si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, entonces el gráfico $y = f(x)$ atraviesa el eje x al menos una vez, y la ecuación $f(x)=0$ tiene por lo menos una raíz entre a y b.

Ejemplo

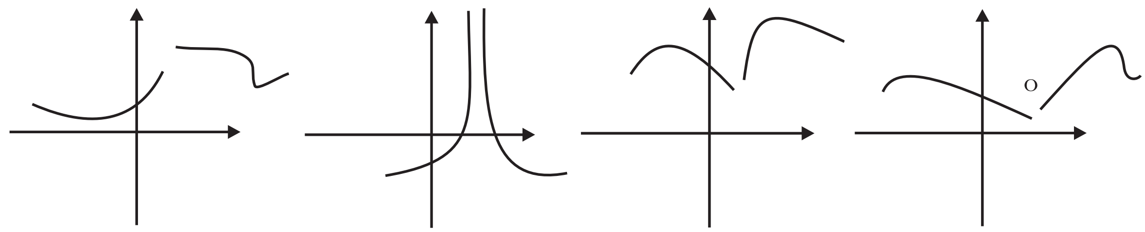
Sea $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, trazar la gráfica de f y verificar si f es continua en el intervalo [-2, 2].

Solución:

$y^2 = 4 - x^2$ se trata de la mitad superior de una circunferencia con centro en el origen y radio 2. Para toda x en el intervalo [-2, 2] existe un $f(x_1)$ asociado a éste. La función f está definida para toda x en el intervalo y no presenta ningún salto. Por lo tanto, la función es continua.



Existen gráficas de funciones que no son continuas; entre éstas se encuentran las siguientes:

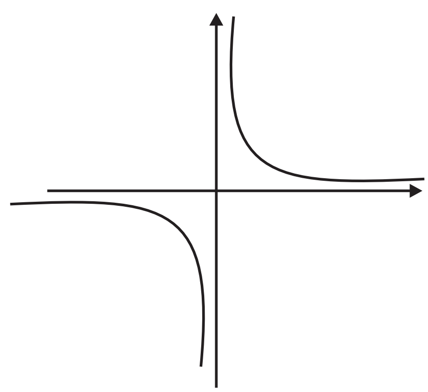


La discontinuidad de una función en un punto puede deberse a distintas causas, y es por esto que la forma de la gráfica en la cercanía del punto de discontinuidad depende de ésta.

Ejemplo

Hallar las discontinuidades de la siguiente función, $f(x)=\dfrac{3}{x}$

Solución: El denominador es cero para $x = 0$, cuando x tiende a 0 por la izquierda, y tiende a $-\infty$ y cuando x tiende a 0 por la derecha, y tiende a ∞. Por lo tanto, la función f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, que es el punto donde se anula el denominador.



Ejercicio

Encontrar todos los números reales en los que la función es continua.

1. $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x^2+5x-6}$
2. $f(x)=\sqrt{4x-3}+x$
3. $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$
4. $f(x)=\dfrac{5}{x^3-x}$
5. $f(x)\dfrac{4x-6}{(x+2)(6x^2+x-5)}$

Trazar la gráfica de las siguientes funciones y hallar las discontinuidades de cada una de éstas.

6. $f(x)=\dfrac{4x-6}{(x+2)(6x^2+x-5)}$

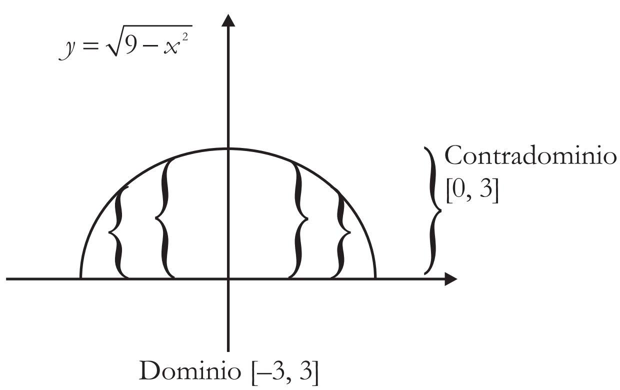
7. $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

8. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$

9. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Funciones crecientes y decrecientes

Dada la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, según la gráfica, se toman dos puntos x_1 y x_2 en [-3, 0] tal que $x_1 < x_2$. Observar que $f(x_1) < f(x_2)$ significa que cuando x crece en [-3, 0], su imagen también crece. Cuando esto sucede, se dice que la función es creciente. En el intervalo [0, 3], al tomar x^3 y x^4 tal que $x_3 < x_4$, sucede que $f(x_3) > f(x_4)$, es decir, cuando x crece en [0, 3], la gráfica de f decrece; entonces, f es una función decreciente. Así, existen funciones que crecen o decrecen en ciertos intervalos.



Una función es creciente en un intervalo I cuando los valores de las imágenes y que corresponden a los valores de x seleccionados, aumentan al recorrer su gráfica de izquierda a derecha.

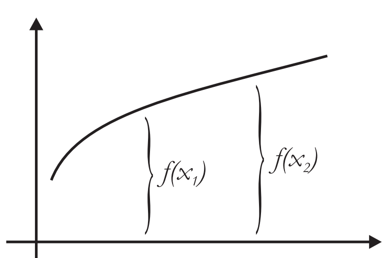
Una función es decreciente en un intervalo I cuando al recorrer su gráfica de izquierda a derecha, los valores de las imágenes y, que corresponden a los valores que toma x, disminuyen.

Definición

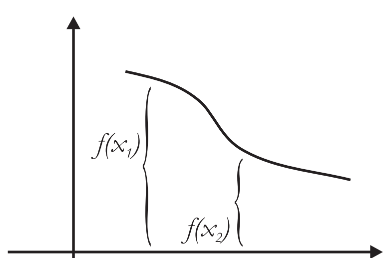
Sea f una función definida en un intervalo I, y x_1, x_2 números en I.

a) F es creciente en I si $f(x_1) < f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$
b) F es decreciente en I si $f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$

Gráficamente quedaría representado de esta forma:



Función creciente

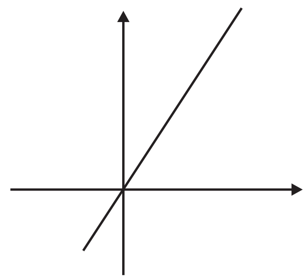


Función decreciente

Ejemplo

Dada la función $f(x) = 2x$, determinar su dominio, codominio y probar si la función es creciente o decreciente en el intervalo [-4, 6].

El dominio de la función son todos los números reales; se trata de una recta que se extiende en ambos sentidos infinitamente. Para toda x real habrá una imagen real, por lo cual el codominio de la función lo conforman todos los números reales. Sean 2 y 4 dos números del intervalo dado, al darle estos valores a la función obtenemos: $f(2)=2(2)=4$ y $f(4)=2(4)=8$, donde $f(2) < f(4)$. De aquí se concluye que la función es creciente en el intervalo y en todo el eje real, tal y como se observa en la gráfica de la derecha.



Ejercicio

Trazar las gráficas de las siguientes funciones. Determinar su dominio y codominio y describir los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = 5 - x^2$
2. $h(x) = \sqrt{x+1}$
3. $g(x) = \dfrac{3}{x}$
4. $F(x) = 4x^2 - 2$
5. $f(x) = 6x + 2$
6. $F(x) = 3 - \sqrt{x}$

Verificar si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en el intervalo dado.

7. $f(x) = 5 - 6x^2 2x^3$, [–3, 2]
8. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, [–1, 4]
9. $f(x) = -1 - x^{\frac{2}{3}}$, [–1, 5]

El último de los criterios para la clasificación de funciones es:

3. **Según la correspondencia entre sus conjuntos.**

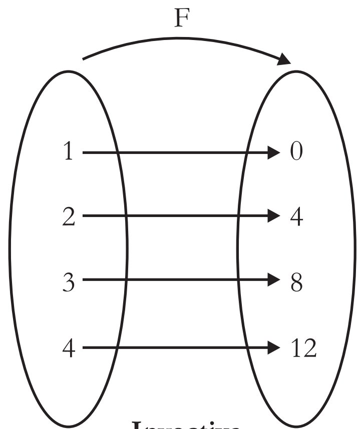
Se clasifican en inyectiva o uno a uno, sobreyectiva y biyectiva.

Función inyectiva o uno a uno, es la función que asocia a cada argumento una imagen distinta.

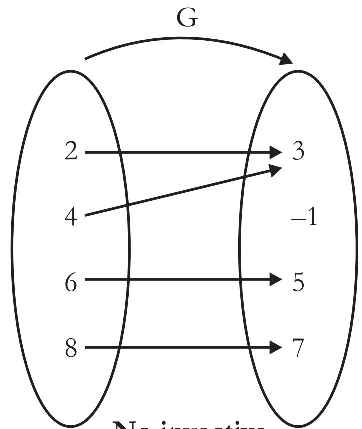
Definición

Una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si sólo se tienen imágenes iguales para argumentos iguales; es decir, si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$

Ejemplo



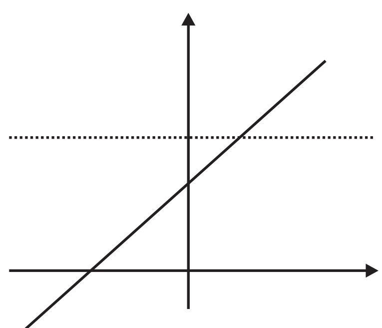
Inyectiva

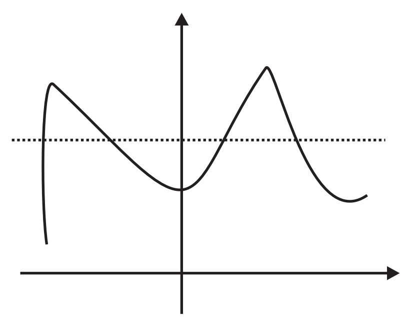


No inyectiva

La función F es inyectiva ya que cada argumento se relaciona con un elemento del codominio; en cambio, G no es inyectiva porque 2 y 4 tienen la misma imagen.

Gráficamente, es muy sencillo determinar si una función es inyectiva: se prueba si cualquier recta horizontal que corta a la gráfica de la función lo hace en un solo punto. Para probar de manera formal si una función es inyectiva se retoma la definición.


1. Sí es inyectiva


2. No es inyectiva

Podemos observar en la gráfica 1 que la función es inyectiva, porque al trazar cualquier recta horizontal únicamente la corta en un punto. La función de la gráfica 2 no es inyectiva, porque existe por lo menos una recta horizontal que la corta en cuatro puntos.

Ejemplo

El siguiente ejemplo nos muestra la manera de verificar si una función es inyectiva.

Probar si la función $f(x) = 4x + 3$ es inyectiva.

Considerando la definición de función inyectiva, para dos imágenes iguales tengo argumentos iguales. Tomamos entonces dos imágenes cualesquiera $f(x_1)$ y $f(x_2)$ y suponemos que son iguales; debemos probar entonces que los argumentos x_1 y x_2 también son iguales.

Como $f(x_1) = f(x_2)$, entonces:
$f(x_1) = 4x_1 + 3$ y $f(x_2) = 4x_2 +3$ son iguales, se tendría entonces que:
$4x_1 + 3 = 4x_2 + 3$, restando 3 en ambos miembros, no se altera la igualdad y se tiene:
$4x_1 = 4x_2$, dividiendo ambos miembros entre 4, se obtiene que:
$x_1 = x_2$, que es lo que queríamos obtener.

Por lo tanto, la función $f(x) = 4x +3$ es inyectiva.

Ya se han observado ejemplos para los cuales el rango de la función es un subconjunto del contradominio. Para el caso en que ambos coinciden nos encontraremos entonces ante una función sobreyectiva.

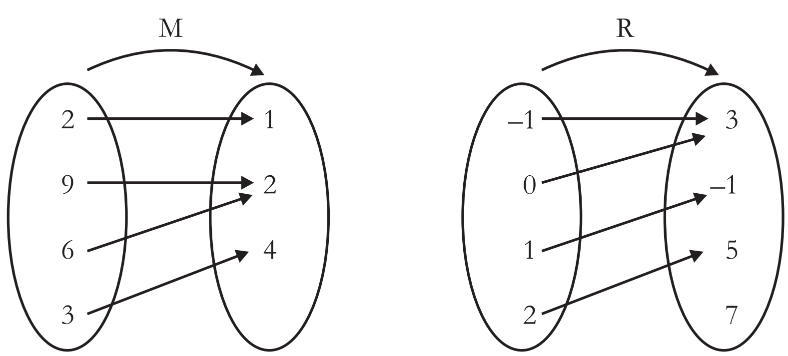
Función sobreyectiva

Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si todo $y \in B$ es imagen de algún $x \in A$.

Definición

Es decir, todo elemento del codomino B está relacionado con algún elemento del dominio A.

En la siguiente figura, la función μ es una función sobreyectiva. En cambio, la función R no es sobreyectiva, pues existe un elemento del codominio que no está relacionado con algún argumento.



De manera formal, también es posible verificar si una función es sobreyectiva, para lo cual se hace uso de la definición.

Ejemplo

Sean $G: D \to R$, donde D={0, 1, 2} y R es el conjunto de los números reales, tal que $G(x) = 3x + 2$. Determinar si G es sobreyectiva.

Solución: Obteniendo las imágenes de la función para los argumentos del conjunto D, se tiene:

$G(0) = 3(0) + 2 = 2$

$G(1) = 3(1) + 2 = 5$

$G(2) = 3(2) + 2 = 8$

El rango ={2, 5, 8} es un subconjunto del codominio R. Por lo tanto, la función no es sobreyectiva.

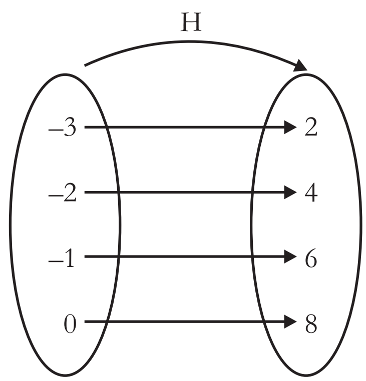
Existen funciones que satisfacen ambas condiciones, es decir, que son uno a uno y sobreyectivas. A éstas se les llama biyectivas.

Definición

Función biyectiva

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo



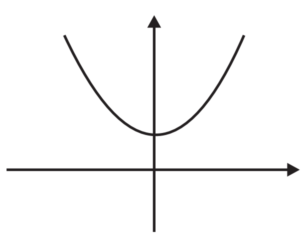
La función H es una función biyectiva. Es decir, inyectiva, ya que a cada par de elementos del dominio le corresponden imágenes diferentes. También H es sobreyectiva, ya que todo elemento del codominio es imagen de un argumento.

Para probar si una función es biyectiva de manera formal, se debe probar si es inyectiva y sobreyectiva, como se hizo en los casos anteriores.

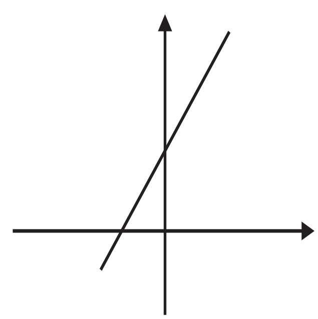
Ejercicio

Mediante la prueba de la recta horizontal, determinar si las siguientes funciones son inyectivas.

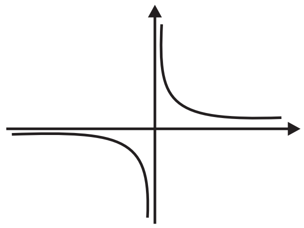
1.



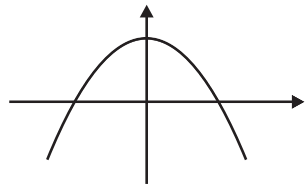
2.



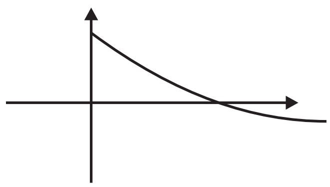
3.



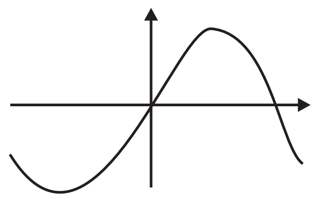
4.



5.



6.



Demostrar de manera formal si las siguientes funciones son o no inyectivas.

7. $f(x) = x^2$

8. $f(x) = 3$

9. $f(x) = x^3$

10. $f(x) = x$

Determinar si las siguientes funciones son sobreyectivas.

11. Sea $G : D \to R$, donde $D = \{0,1,2\}$ y $G(x) = 3x + 2$, $x \in R$
12. Sea $G : R \to R$ y $G(x) = x^2$
13. Sea $G : R \to R$ y $G(x) = 4x - 1$
14. Sea $F : R \to R^{\geq 0}$ y $F(x) = x^2 + 2$

Graficar y determinar si las siguientes funciones son biyectivas. Considerar el dominio y codominio de la función como R.

15. $f(x) = 0$
16. $f(x) = 5 - x$
17. $G(x) = 2 - x^2$

1.2.2 Funciones inversas

Para definir la inversa de una función es fundamental que distintos números en el dominio arrojen diferentes valores en el contradominio. La función debe ser uno a uno y sobreyectiva, es decir, biyectiva.

La función inversa se denota por f^{-1}; el símbolo (-1) no significa potencia, por lo que:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Definición

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Una función $f^{-1} : B \to A$ se llama función inversa de f si:

$f^{-1} : (f(x)) = x$ para todo x en A,

y $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x en B.

Una función f que crece o decrece en su dominio tiene una función inversa, la cual es biyectiva. Existen diversos métodos algebraicos para hallar la inversa de una función. Aquí sólo estudiaremos uno de éstos, el cual se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Si $f(x) = 5x - 2$, hallar la función inversa de f y demostrar que $f(f^{-1}(x)) = x$

Solución: Primero se sustituye $f(x)$ por y

$$y = 5x - 2$$

Se despeja x y se obtiene:

$$x = \frac{y+2}{5}$$

Se permutan las variables y obtenemos la inversa de $f(x)$:

$$y = \frac{x+2}{5}$$

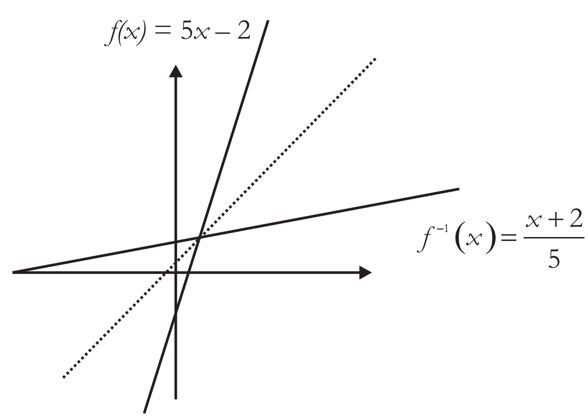
Por lo tanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$$

Ahora sustituimos $f^{-1}(x)$ por x en $f(x)$:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{5}\right) = 5\left(\frac{x+2}{5}\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

La gráfica del ejemplo anterior quedaría de la siguiente forma:



Definición

Teorema

Las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$.

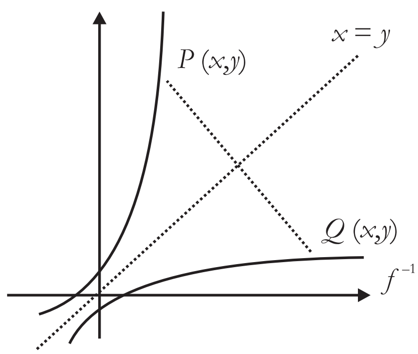
De esta manera, a partir de la gráfica de una función podemos construir la gráfica de su inversa.

El teorema se demuestra de la siguiente manera:

Sea $P(x, y)$ un punto de la función f. Sea $Q(x, y)$ un punto de f^{-1}, el punto medio de PQ es:

$$P_m = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+x}{2}\right) \text{, o bien, } P_m = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

Éste es un punto de la recta $y = x$. Es así que los puntos equidistan de la recta $y = x$, porque P era un punto cualquiera de f. Por lo tanto, las gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$



Ejemplo

Encontrar la función inversa de $f(x) = x^2$, con $f : R^{\geq 0} \to R^{\geq 0}$, y demostrar que $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ y $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$

Solución: Se sustituye $f(x)$ por y:

$y = x^2$

Se despeja x y se obtiene:

$x = \pm\sqrt{y}$

Permutar las variables para obtener la inversa de $f(x)$:

$y = \pm\sqrt{x}$

El dominio de f es $[0, \infty]$ y el contradominio $[0, \infty]$. Como este último debe ser no negativo, se descarta $y = -\sqrt{x}$. Por lo tanto,

$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$

Esta última igualdad demuestra que el dominio de f^{-1} es [0, ∞] y el contradominio o rango [0,∞].

Verificando:

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=f^{-1}\left(x^{2}\right)+\sqrt{x^{2}}=x \qquad x\geq 0 \text{ y}$$
$$ff\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=f\left(+\sqrt{x}\right)=\left(+\sqrt{x}\right)^{2}=x \qquad x\geq 0$$

Con lo que se demuestra que la función inversa está dada por $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{x}$, con $x\geq 0$.

Debe tenerse especial cuidado en el dominio, codominio y rango de definición de una función, para que al encontrar la inversa, ésta se halle definida en esos conjuntos.

Ejercicio

Hallar la inversa de las siguientes funciones y demostrar $f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=x$

1. $f\left(x\right)=x^{3}$
2. $f\left(x\right)=\dfrac{2}{3x+1}$
3. $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^{3}$
4. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3x-2}$
5. $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$

Encontrar la función inversa de la función con el dominio y codominio que se indican.

6. $f\left(x\right)=x^{2}$ $\quad\left(f:R\rightarrow R\right)$
7. $F\left(x\right)=x^{3}+2$ $\quad\left(F:R^{\geq 0}\rightarrow R^{\geq 2}\right)$
8. $g\left(x\right)=x-3$ $\quad\left(g:R\rightarrow R\right)$
9. $f\left(x\right)=x^{2}+1$ $\quad\left(f:R^{\geq 0}\rightarrow R^{\geq 1}\right)$

Graficar la función inversa de las siguientes funciones.

10. $f\left(x\right)=\sqrt{3x-9}$ $\quad x\geq 3$
11. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$
12. $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ $\quad x\geq 0$

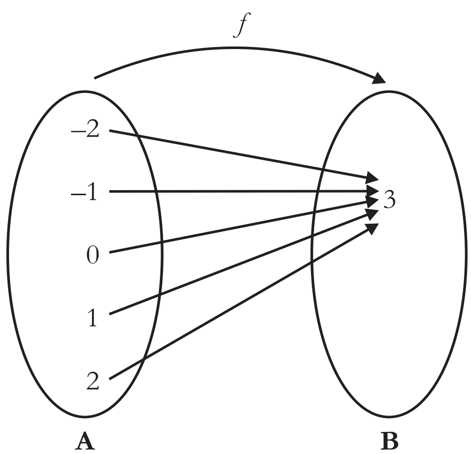
1.2.3 Funciones especiales

Función constante

Una función constante es aquella que no depende de ninguna variable ya que, al evaluarla en cualquier valor real, la imagen que se obtendrá será siempre la misma.

Una función f es una función constante si existe un elemento fijo c en el contradominio, tal que $f(x) = c$ para toda x en el dominio.

Si se representa la función constante por medio de un diagrama sagital como el de la figura, todos los argumentos de A se relacionan con la misma imagen en B.

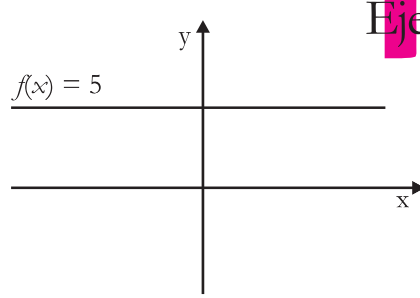


En forma gráfica, la función constante consiste en el lugar geométrico de los puntos de la forma (x, c), es decir, una recta horizontal. Su dominio serán los números reales y el contradominio es $\{c\}$, con c constante.

Ejemplo

La gráfica de la función $f(x) = 5$, se refiere a una recta horizontal, donde la función no depende de x.

El dominio de una función constante es todo el eje real y su rango $\{c\}$.



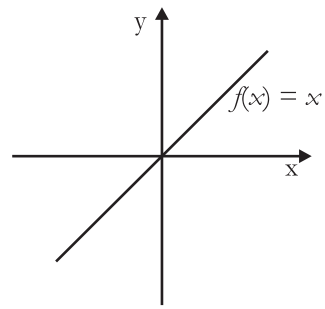
Función idéntica

Las funciones idénticas son aquellas que asocian a cada elemento del dominio el mismo elemento en su contradominio.

Definición

Una función *f* es una función idéntica cuando el dominio coincide con su contradominio; es decir, para toda x en el dominio, su imagen es ésta misma.

Tiene la forma $f(x) = x$



Expresada gráficamente, se trata de una recta que pasa por el origen formando un ángulo de 45° respecto al eje X. El dominio y contradominio de la función idéntica es todo el eje real, ya que la recta se puede prolongar en cualquier sentido de manera infinita.

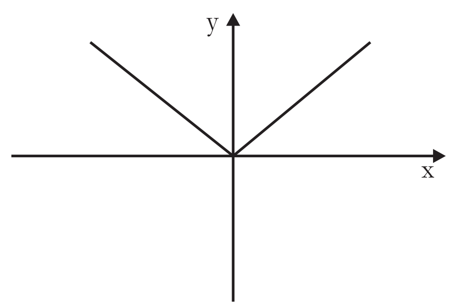
Función valor absoluto

La función valor absoluto es aquella que asocia a cada elemento del dominio con su valor absoluto.

Recordemos la definición del valor absoluto de un número.

Definición

Sea $x \in R$, entonces $$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Su gráfica es como se muestra en la figura.

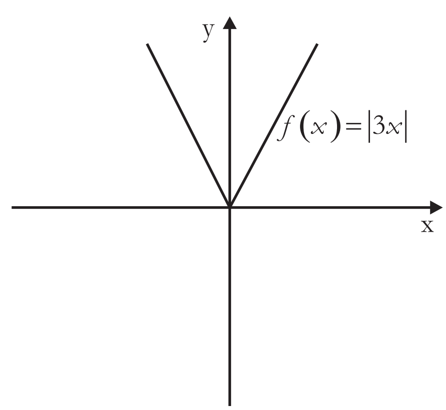
El dominio de la función es el conjunto de los números reales, y su rango, el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero, es decir, $f(x) \in [0, \infty)$.

Ejemplo

Graficar la siguiente función valor absoluto, $f(x) = |3x|$

Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto:

$f(x) = 3x$ si $x \geq 0$ y
$f(x) = -3x$ si $x < 0$, entonces



la gráfica de la función queda representada en la figura. El dominio es el conjunto de los números reales y el rango son los números reales mayores o iguales a cero.

Funciones escalonadas

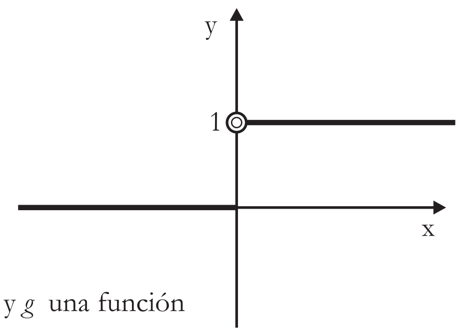
Se trata de funciones que están definidas como uno o varios segmentos de recta.

Una función escalonada básica es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Gráficamente, la función escalonada básica se presenta en la figura.

El dominio de la función son los números reales y su rango es $\{0,1\}$.

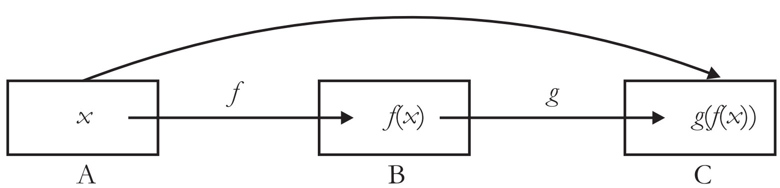


Funciones compuestas

Sean A, B y C tres conjuntos de números reales. Sea f una función de A a B y g una función de B a C. Esto se puede expresar como

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Para toda x en A, como se observa en la figura siguiente, el número $f(x)$ está en B. Como el dominio de g es B, puede determinarse entonces el número $g(f(x))$ y tal número está en C. Asociando x a $g(f(x))$, se obtiene una función de A a C que se llama *composición* de g con f. En ocasiones se usa el operador $\circ$ y se denota la composición como $g \circ f$.



Esta combinación asocia a cada elemento de A un elemento de C, obteniéndose así una función cuyo dominio es A y contradominio C. Esta función se llama **composición** de f y g.

Definición

Sea f una función de A a B y g una de B a C, **la función composición** $g \circ f$ es la función de A a C definida como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para toda x en A. A $g \circ f$ se le llama **función compuesta de g con f**. ($g \circ f$ se lee "f seguida de g)".

Observar que la composición de las funciones se escribe en orden inverso $g \circ f$, ya que primero se aplica f y después se aplica g.

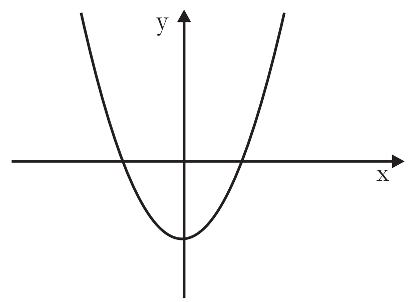
Ejemplo

Sean f y g funciones dadas por $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 4x + x^2$, encuentra $(g \circ f)(x)$, el dominio y contradominio de $g \circ f$.

Solución: Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x-1) \\ &= 4(x-1) + (x-1)^2 \\ &= 4x - 4 + x^2 - 2x + 1 \\ &= x^2 + 2x - 3\end{aligned}$$

El dominio de f, así como el dominio de la composición $g \circ f$, son en ambos casos los números reales. El contradominio de f son los reales, mientras que para la composición $g \circ f$ es el intervalo [4, ∞], tal como se observa en la figura.



Considerando la definición de función compuesta, si el dominio de g es un subconjunto B' de B, entonces el dominio de $g \circ f$ consta de todos los x tales que $f(x)$ está en B'.

Ejemplo

Sean f y g dadas por $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 3x + \sqrt{x}$, encuentra $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

Solución: Sustituyendo, obtenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x-1) \\ &= 3(x-1) + \sqrt{x-1} \\ &= 3x - 3 + \sqrt{x-1}\end{aligned}$$

El dominio de f son los números reales, pero en la última igualdad se indica que $(g \circ f)(x)$ es un número real sólo si $x \geq 1$. Por lo tanto, el dominio de la composición $g \circ f$ es el intervalo [1,∞].

Ejercicio

Graficar las siguientes funciones y especificar cuál es el dominio y rango para cada una.

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = -2$
3. $g(x) = 2^3$
4. $f(x) = |x + 5|$
5. $r(x) = |x + 2| - 1$
6. $f(x) = \left|\frac{1}{3}x\right|$

7. $f(x) = x - |x|$

8. $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

9. $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad x \leq 3 \end{cases}$

Determinar $(g \circ f)(x)$, así como el dominio y rango de $g \circ f$.

11. $f(x) = x^2 + 3$ $\qquad g(x) = 2 - 5x$

12. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

13. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ $\qquad g(x) = 3x^2 + 2$

14. $f(x) = x^3 - 4$ $\qquad g(x) = 3\sqrt{x+4}$

15. $f(x) = |x|$, $\qquad g(x) = -7$

1.2.4 Transformación de gráficas de funciones

Traslaciones horizontales y verticales

Ahora estudiaremos la manera de obtener nuevas funciones, aplicando operaciones algebraicas como la suma y la multiplicación a otras funciones.

Consideraremos la función obtenida al sumar una constante c a cada uno de sus valores. A veces decimos que dos funciones difieren por una constante, esto es:

$$g(x) = f(x) + c$$

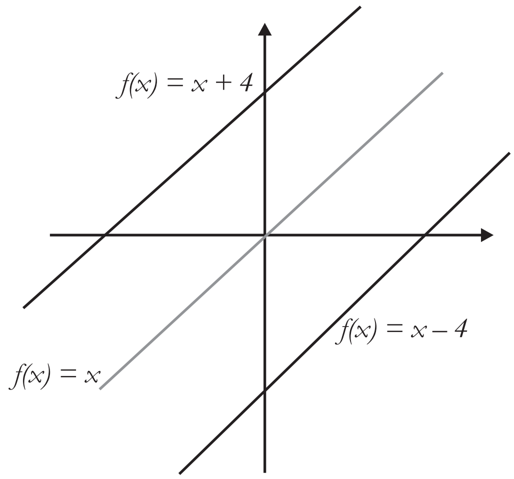
para toda x en el dominio de f.

Definición

Traslación vertical de la gráfica de una función ($c > 0$)	
Trazar la gráfica de:	Trasladar la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x) - c$	c unidades hacia abajo
$y = f(x) + c$	c unidades hacia arriba

Ejemplo

Dada $f(x) = x + c$, trazar la gráfica de f para $c = 4$ y $c = -4$



Ya dibujadas las dos gráficas en el mismo sistema coordenado, se observa que para trazar la gráfica $f(x) = x + 4$, sólo se sumó 4 a la ordenada de cada punto; esto equivale a trasladar $f(x) = x$, 4 unidades hacia arriba. Para $c = -4$, se restó 4 a las ordenadas, trasladando $f(x) = x$, 4 unidades hacia abajo. Cada una de estas gráficas es una recta simétrica con respecto a la recta $y = x$

Existen reglas semejantes para desplazamientos horizontales.

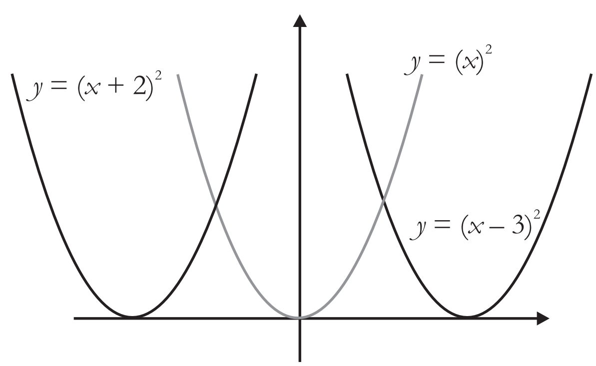
Definición

Traslación horizontal de la gráfica de una función ($c > 0$)	
Trazar la gráfica de:	Trasladar la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x - c)$	c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	c unidades hacia la izquierda

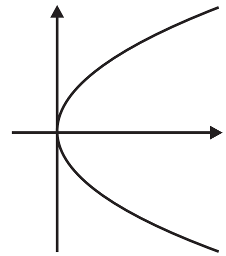
Ejemplo

Trazar la gráfica de f para $f(x) = (x - 3)^2$ y para $f(x) = (x + 2)^2$

Teniendo en cuenta la función $y = x^2$, observamos que al sumar 3 a la abscisa, esta gráfica se traslada 3 unidades a la derecha, obteniendo $f(x) = (x - 3)^2$. Al trasladarla 2 unidades a la izquierda, se obtiene la gráfica de $f(x) = (x + 2)^2$

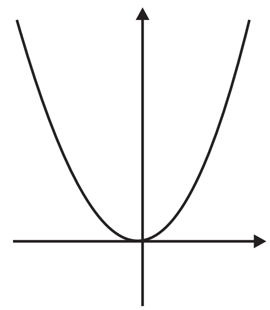


Reflexión respecto a los ejes y la recta a 45°



Consideremos la gráfica de la ecuación $y^2 = x$

Si doblamos el plano coordenado por el eje x, entonces la mitad superior coincide con la mitad inferior. Se dice entonces que la gráfica es **simétrica con respecto al eje x**, ya que para cada punto (x, y) en la gráfica, (x, -y) también está representado.



De la misma forma, para la gráfica de la función $y = x^2$

Al doblar el plano coordenado por el eje y, la mitad izquierda coincide con la mitad derecha. Entonces, la gráfica es **simétrica con respecto al eje y**, es decir, si el punto $(-x, y)$ está en la gráfica, también (x, y).

Definición

Simetría de la gráfica de una ecuación

- La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje Y, si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente.
- La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje X, si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.
- La gráfica de una curva es simétrica respecto a la recta a 45°, $y = x$, si su ecuación no cambia al intercambiar x por y.

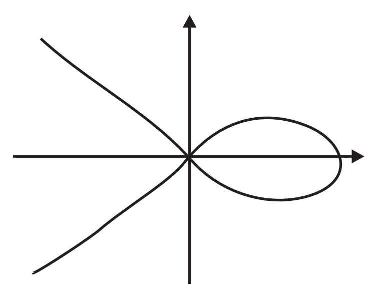
Cuando existe simetría respecto a los ejes y a la recta $y = x$, es suficiente con trazar la gráfica en una mitad del plano coordenado y el resto de ésta se traza como reflexión de la primera.

Ejemplo

Analizar el tipo de simetría que tiene la siguiente ecuación.

$$y^2(1 + x) = x^2(1 - x)$$

Solución: Al observar la grafica notamos claramente que se trata de una curva simétrica respecto al eje X.



Aplicando la definición de simetría, se tiene:

Sustituimos y por $-y$, y obtenemos:
$(-y)^2(1 + x) = x^2(1 - x)$

$(y)^2(1 + x) = x^2(1 - x)$. Por lo tanto, la curva es simétrica respecto al eje X.

Una manera de obtener la **gráfica simétrica de una función** es cambiando $f(x)$ por $f(-x)$ o por $-f(x)$, o bien intercambiando x y y.

Reflexión de la gráfica de una función

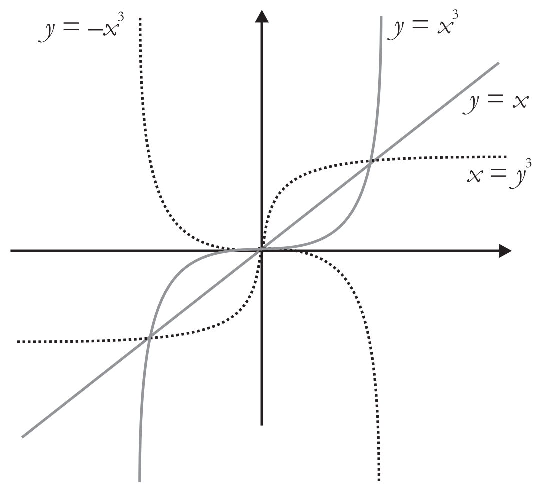
1. La gráfica de $y = -f(x)$ es una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$, con respecto al eje X.
2. La gráfica de $y = f(-x)$ es una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$, con respecto al eje Y.
3. Cuando en la gráfica de una función intercambiamos x por y, obtenemos su reflexión con respecto a la recta $y = x$

Ejemplo

En la sección de funciones inversas indicamos que una función y su inversa son simétricas o se reflejan respecto a la recta a $y = x$

Dada la función $y = x^3$, trazar en el mismo sistema coordenado la gráfica $y = -x^3$ y $x = y^3$ Indicar el tipo de reflexión que se presenta.

La gráfica de la función $x = y^3$ es una reflexión de $y = x^3$ respecto a la recta de 45°. La gráfica de la función $y = -x^3$ es una reflexión de $x = y^3$ respecto al eje Y.



Ejercicio

Trazar la gráfica de f para los valores de c en un mismo plano coordenado, utilizando traslaciones verticales y horizontales, o reflexiones.

1.	$f(x) = 2x + c$	$c = 3$	$c = -4$	2.	$f(x) = x^3 + c$	$c = 0$	$c = -2$
3.	$f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c$	$c = 4$	$c = -3$	4.	$f(x) = \lvert x \rvert - c$	$c = 5$	$c = -2$
5.	$f(x) = \lvert x - c \rvert + 1$	c = 5	$c = -4$	6.	$f(x) = 6(x + c)$	$c = 2$	$c = -6$
7.	$f(x) = (x + c)^3$	$c = 3$	$c = 3$ $c = 0$	8.	$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + c$	$c = -5$	$c = 1$

Trazar la gráfica de las siguientes funciones en el mismo plano coordenado y analizar el tipo de reflexión que presentan.

9.	$y = x^2 + 1$	$x = y^2 + 1$	10.	$y = \sqrt{x} + 2$	$x = \sqrt{y} + 2$ $x, y \geq 0$
11.	$y = x^2 + 9x$	$x = y^2 + 9y$	12.	$y = \dfrac{x + 3}{2}$	$y = \dfrac{-x + 3}{2}$
13.	$y = \dfrac{x}{x + 1}$	$x = \dfrac{y}{y + 1}$	14.	$y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$	$y = -\sqrt[3]{x^2 + 1}$

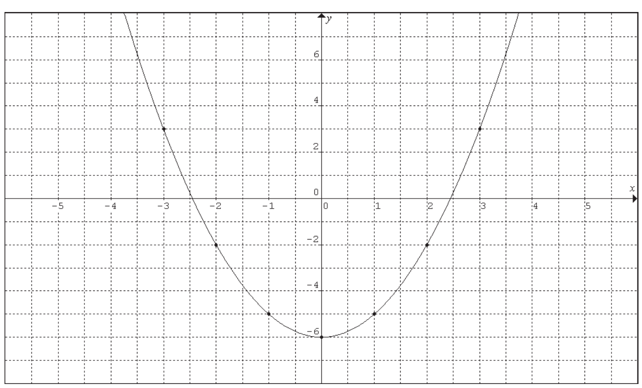
Autoevaluación

NOMBRE DEL ALUMNO: ______________________ ACIERTOS ______

I. Coloca dentro del paréntesis de la izquierda las letras que correspondan a la respuesta correcta, tomándola de la columna de la derecha.

1. ( ) Rango
2. ( ) Segunda coordenada de un par ordenado — A) Variable dependiente
3. ( ) Eje X
4. ( ) Dominio
5. ( ) Eje Y — B) Variable independiente
6. ( ) Primera coordenada de un par ordenado
7. ( ) Contradominio
8. ( ) La imagen se localiza en:
9. ( ) Es aquella cuyos valores no dependen de los de otra
10. ( ) El argumento se localiza en:

II. Dada la siguiente gráfica, halla las otras cuatro formas de representar a la función (dos reactivos cada una), determina los intervalos en que la función es creciente y/o decreciente (dos reactivos); además, halla su inversa (2 reactivos) y demuéstralo (un reactivo).



III. Dada la siguiente expresión, determina si es continua en el intervalo de [-3, 3]. Realiza la tabla y señala un argumento y su imagen:

$$y = 4x + 6$$

IV. Determina si la siguiente función es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva:

$$f(x) = \frac{x+3}{2}$$

V. Grafica la siguiente función compuesta en el eje coordenado de la parte inferior:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \in R[-3,\ 0] \\ -3 & x \in R[0,\ 3] \\ x - 6 & x \in R[3,\ 5] \end{cases}$$