Diferenciales e integral indefinida

UNIDAD 1

OBJETIVO

El estudiante:

- Aplicará los conceptos de diferencial e integral indefinida, mediante la solución de problemas relacionados con las ciencias naturales, las económico-administrativas y sociales; tras conocer las reglas de diferenciación e integración inmediata; mostrando una actitud analítica y participativa.

INTRODUCCIÓN

En diversos campos de estudio, como en el de la física, economía, administración y de las ciencias sociales, se requiere realizar la estimación de una diferencia, o bien, interpretar un fenómeno como resultado inverso a la derivación. En esta unidad se aborda el concepto de diferencial, el cual permite hallar una aproximación de una diferencia requerida, recuperando, además, el concepto de derivada.

Asimismo, se presenta la integración como la operación inversa de la derivación. Se estudia, además, el concepto de antiderivada y se muestran los tres significados de la constante de integración, dando a conocer las reglas de integración inmediata y el método para integrar expresiones que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$; $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. Los temas aquí tratados tienen un sinfín de aplicaciones; las que refiere esta unidad se relacionan con errores cometidos en mediciones, leyes del movimiento, costo total, ingreso total y utilidad total.

Evaluación diagnóstica

Nombre del alumno: ______________________________

Grupo: __________ Número de lista: __________ Aciertos: __________

I. Desarrolla en tu cuaderno los siguientes ejercicios y subraya la opción que muestra el resultado correcto:

1. El resultado de $5+(3-1)^0+[(4)(5)-2]\div 6+1=$

a) –5 b) –25 c) 10 d) 5

2. Encuentra $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

a) 0 b) 1 c) 3 d) No existe

3. Si $f(x)= x^2 + 3x -5$, entonces el valor de f (-2) es:

a) –7 b) –15 c) 5 d) –2

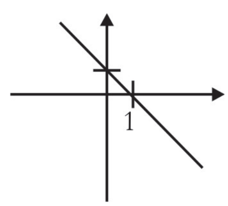
4. La ecuación de la recta que pasa por el punto (3, –1) y tiene pendiente 2 es:

a) $2x-y-7=0$ b) $2x+y+7=0$ c) $x+2y-7=0$ d) $x-2y+7=0$

5. El movimiento de una partícula está descrito mediante la función d(t) = 3t – 1, donde t es el tiempo en segundos y d(t) la distancia en metros recorrida por la partícula en el tiempo t. ¿Cuál es la velocidad instantánea de la partícula?

a) t m/s b) 1m/s c) 2m/s d) 3m/s

6. ¿Cuál es la función que representa la siguiente gráfica?



a) $y=(x-1)^2$ b) $y=x^2-1$ c) $y=x+1$ d) $y=-x+1$

7. La derivada de $y=x\sqrt{3-2x^2}$

a) $y=\dfrac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$ b) $y=\dfrac{3-2x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$ c) $y=3\sqrt{3-2x^2}$ d) $y=-\dfrac{4}{\sqrt{3-2x^2}}$

II. Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es el incremento de una variable? ______________________________

2. ¿Cómo se lee Δx? ______________________________

3. ¿Qué es una función? ______________________________

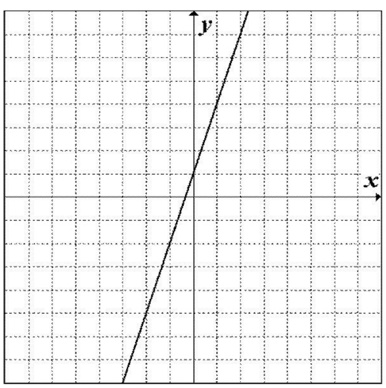
4. ¿Qué es la pendiente de una recta? ______________________________

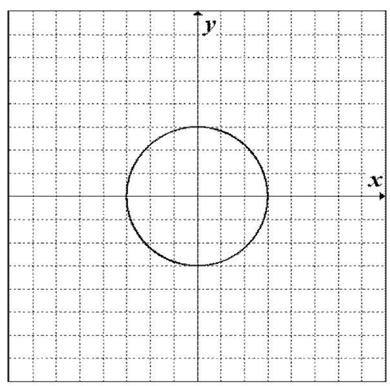
5. ¿Cómo se define la derivada de una función? ______________________________

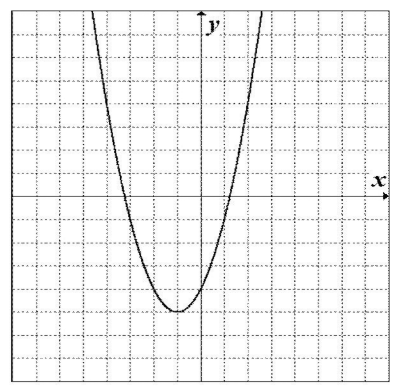
6. Si conoces la función $y = f(x)$ que determina una curva, ¿cómo encuentras la ecuación de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos?

____

III. En las siguientes relaciones mostradas gráficamente, identifica el dominio y el recorrido; además, señala la gráfica que corresponde a una función.

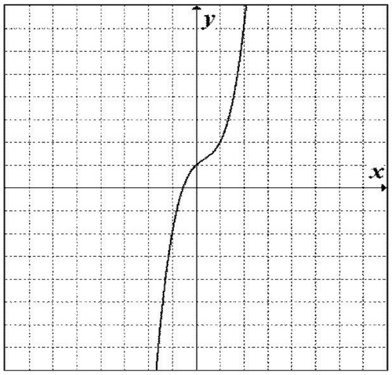


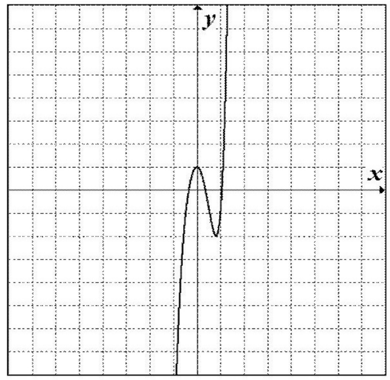


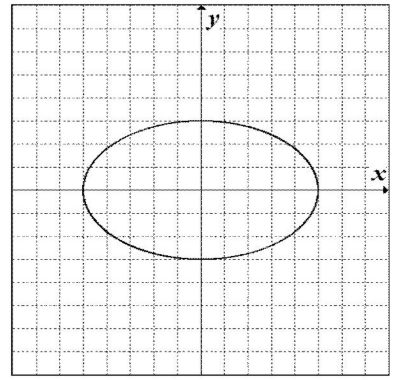


______________________ ______________________ ______________________

______________________ ______________________ ______________________

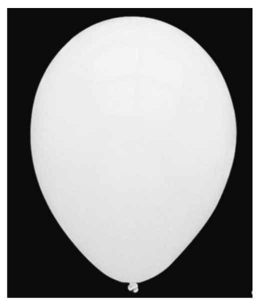






1.1 LA DIFERENCIAL

En áreas en donde se modela una situación mediante una función, como son medicina, mecánica, economía, física, sociología, entre otras, hay momentos que se requiere estimar una diferencia entre dos valores de la función. Algunas veces, esta diferencia debe determinarse por medio del incremento de la función, mismo que aprendiste a calcular en el semestre anterior; pero hay ocasiones en que se permite dar una aproximación de tal incremento, entonces se aplica la diferencial.



Un globo lleno de helio quedará suspendido en el aire mientras que el gas dentro y el equipo unido a él, pesen menos que el aire en el que está flotando. ¿En qué momento el globo alcanza la máxima altura?

Cuando se encienden fuegos artificiales, se visualiza la explosión unos segundos antes de oírla. ¿Qué diferencia hay entre la velocidad de la luz y la del sonido?

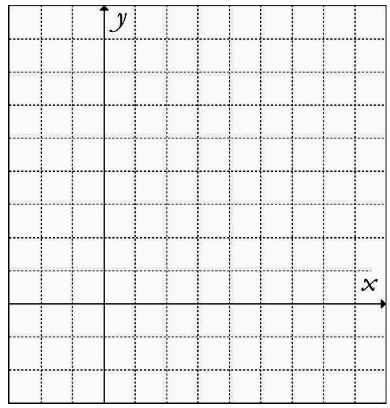
Actividad

Acércate al concepto de la diferencial.

I. Investiga en varias fuentes bibliográficas el concepto de diferencial de una función; posteriormente, en clase, comparte la información obtenida con tus compañeros.

II. En el curso de Matemáticas V estudiaste que el incremento de x se calculó por medio de la expresión $\Delta x = x_2 - x_1$, asimismo, el incremento de y con $\Delta y = y_2 - y_1$. A partir de esto y con base en tus conocimientos previos acerca de funciones, organízate con tus compañeros y en binas resuelvan lo siguiente:

1. Construyan en el plano la gráfica de $y = e^{\frac{x}{4}}$



2. Determinen los puntos $\mathbf{P}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{Q}(x_2, y_2)$ tomando como $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$ y remárquenlos sobre la curva $y = e^{\frac{x}{4}}$, también localicen en el mismo plano el punto $\mathbf{R}(x_2, y1)$.

3. Encuentren la ecuación de la recta tangente (y_{tan}) a la curva $y = e^{\frac{x}{4}}$ en el punto $\mathbf{P}(x_1, y_1)$ y trácenla en el mismo plano.

4. Determinen y marquen el punto $S(x, y_{tan})$ sobre la recta tangente antes encontrada en $x = 6$.

5. Calculen $\Delta x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$, así también la longitud $y - y_1$.

6. Una vez desarrollados los puntos anteriores, analicen y respondan a las siguientes preguntas:

   a) ¿Cómo es la longitud $\Delta y_2 = y_1$ respecto a $y - y_1$? ______________________________

   ____

   b) ¿Qué sucede con estas longitudes a medida que $x_2 = x = 6$ se acerca al valor $x_1 = 3$?

   ____

   ____

7. En plenaria, con el apoyo de tu profesor, comparen sus respuestas.

¿Sabías que...?

Las notaciones $y' = f'(x)$ fueron introducidas por **Lagrange**, mientras que las formas $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ se deben a **Leibniz**, quien las utilizó para simbolizar el paso del límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a $\frac{dy}{dx}$ cambiando Δ por d.

Definiciones de Δx y $f'(x)\,\Delta x$

Es sabido que la derivada de la función $y = f(x)$ se representa por la notación

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

en donde cabe recalcar que la expresión $\frac{dy}{dx}$ es el símbolo que representa el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero, más no la fracción con numerador dy y denominador dx.

No obstante, al abordar el curso de cálculo integral se hace necesario dar un significado por separado tanto de *dy* como de *dx*.

Definición

Si $f'(x)$ es la derivada de la función $y = f(x)$ para un valor particular de x, y Δx es un incremento de x, la **diferencial** de $y = f(x)$ se representa por el símbolo $dy = d\,f(x)$ y se define por:

$$d\,f(x) = d\,y = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

Nota que la diferencial depende de dos variables, de x por depender $f'(x)$ de ella, y de Δx.

Ahora, si $y = f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$; si estas expresiones son sustituidas en la expresión anterior, tenemos si:

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

entonces $dy = (1)\,\Delta x$.

Pero $dy = dx$

O bien,

$$dx = \Delta x$$

Es decir, cuando x es la variable independiente, la diferencial de x es dx, y es idéntica a Δx.

De esta forma, la expresión que define la diferencial puede en general escribirse como:

$$Dy = f'(x)dx$$

Y se enuncia como:

La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

- *dy* se lee **diferencial de** *y*
- *dx* se lee **diferencial de** *x*

Interpretación gráfica de *dy*

Los diferenciales *dy* y *dx* se interpretan geométricamente.

Observa las siguientes figuras:

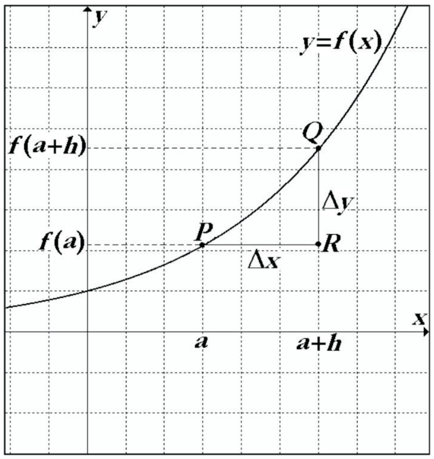


Figura a

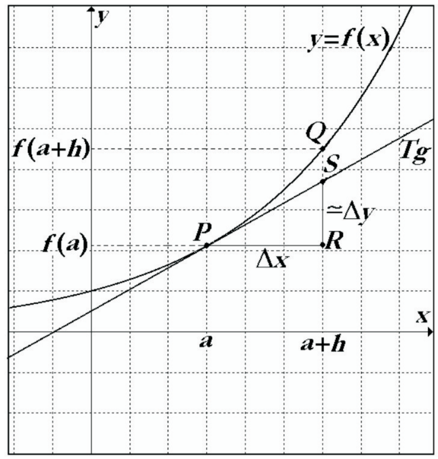


Figura b

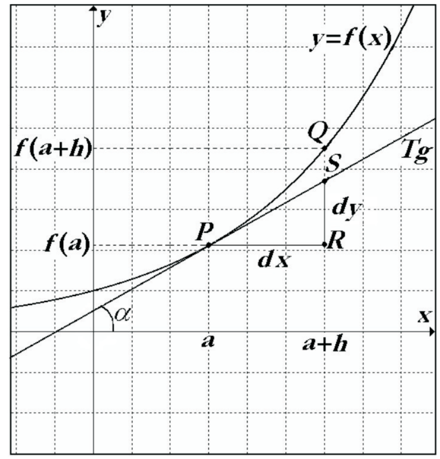


Figura c

En cada una de éstas puedes percibir lo siguiente:

Figura a. Se tiene la curva de la función $y = f(x)$ y su incremento se representa al pasar del valor $x = a$ a $x = a + h$ por:

$$\Delta y = f\left(a+h\right) - f\left(a\right)$$

Figura b. Está trazada la tangente a la curva en el punto $P(a, f(a))$, con pendiente $f'(a)$. Puedes percibir que el incremento de la tangente Δy al pasar del valor $x = a$ a $x = a + h$, se aproxima al incremento de la función, es decir:

$$f'\left(a\right) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y \approx f'\left(a\right)\Delta x$$

Figura c. El incremento de la variable independiente se designa por dx y el incremento de la ordenada de la tangente por dy, puedes advertir que la diferencial $dy = \overline{RS}$ es una aproximación del incremento $\Delta y = \overline{RQ}$. Así, se tiene la definición:

$$\Delta y \approx dy = f'\left(a\right) dx$$

Y para un valor arbitrariamente elegido de la variable independiente x, se tiene:

$$dy = f'\left(x\right) dx$$

Nótese: Δy representa el cambio en la altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa la variación en y a lo largo de la recta tangente, cuando x varía en un valor $dx = \Delta x$.

Actividad

Incremento y diferencial

I. Dada la función $y = f(x)$, el valor de x y el incremento Δx pueden determinar dx, Δy, y $\Delta y - dy$ a partir de lo expuesto anteriormente. En equipos de trabajo de cuatro integrantes como máximo, completen las tablas, según se indica, y adjunten a la misma su procedimiento.

1. Si $y = x^2$.

x	Δx	dx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1				
2	0.5				
2	0.1				
2	0.01				

Procedimiento:

1. Si $y = 5x^2$.

x	Δx	dx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1				
2	0.5				
2	0.1				
2	0.01				

Procedimiento:

2. Si $y = x^4 - 3x^2 + 5x + 4$.

x	Δx	dx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	-1				
2	-0.5				
2	-0.1				
2	-0.01				

Procedimiento:

II. El profesor elegirá el equipo que expondrá la solución de las tablas.

Reglas de la diferenciación

Como ya lo has estudiado, la derivada de una función se calcula mediante el cociente de Newton $\left(\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$; o bien, para facilitar este procedimiento en funciones complejas se aplican reglas de derivación según la estructura de cada función.

Actividad

Recordando fórmulas.

I. Revisa tus notas del semestre anterior referente a las fórmulas para derivar funciones algebraicas y completa la siguiente tabla:

Se enuncia:	Fórmula:
La derivada de la función constante es igual a cero.	$\frac{d}{dx}c=0$
La derivada de la función identidad es igual a uno.	
	$\frac{d}{dx}cx=c$
La derivada de la potencia de una variable respecto a sí misma de exponente constante es igual al producto del exponente por la variable elevada al exponente disminuido en una unidad.	
	$\frac{d}{dx}cx^{n}=cnx^{n-1}$
La derivada del producto de una constante y una función es igual al producto de la constante y la derivada de la función.	$\frac{d}{dx}c(u)=c\cdot\frac{d}{dx}(u)$
La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente y la función elevada al exponente disminuido en una unidad, y esto por la derivada de la función (Regla de la cadena).	
	$\frac{d}{dx}c(u)^{n}=cn(u)^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}(u)$
La derivada de la suma algebraica de dos funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de dichas funciones.	
	$\frac{d}{dx}uv=(u)\frac{d}{dx}(v)+(v)\frac{d}{dx}(u)$

Se enuncia:	Fórmula:
La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador y la derivada del numerador, menos el producto del numerador y la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.	

II. También recupera el formulario que hiciste para derivar funciones trascendentes, compara tus fórmulas con las que a continuación se enlistan y redacta un formulario nuevamente, ahora con las características que especifique tu profesor.

Funciones	Simples	Compuestas
Logarítmicas	$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$	$\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{d}{dx}(u)$ $\frac{d}{dx}\log_a(u) = \frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{d}{dx}(u)$
Exponenciales	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{d}{dx}(u)$ $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx}u^v = \underbrace{vu^{v-1}\frac{d}{dx}(u)}_{\text{potencial}} + \underbrace{u^v 1nu\frac{d}{dx}(v)}_{\text{exponencial}}$	

Funciones	Simples	Compuestas
Trigonométricas	$\frac{d}{dx}\, sen\, x = \cos x$	$\frac{d}{dx}\, sen(u) = \cos(u) \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \cos x = -sen\, x$	$\frac{d}{dx} \tan(u) = \sec^2 u \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx} \tan(u) = \sec^2 u \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$	$\frac{d}{dx} \cot(u) = -\csc^2 u \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx} \sec(u) = \sec u \tan u \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx} \csc(u) = -\csc u \cot u \cdot \frac{d}{dx}(u)$
Trigonométricas inversas	$\frac{d}{dx} sen^{-1} x = \frac{d}{dx} arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx} arcsen u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{d}{dx} arc \cot x = -\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx} arc \cot u = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{d}{dx} arc \sec x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx} arc \sec u = \frac{1}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(u)$
	$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{d}{dx} arc \csc x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx} arc \csc u = -\frac{1}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(u)$

¿Sabías que...?

La operación para hallar diferenciales se llama diferenciación.

Habiendo recordado las fórmulas para derivar funciones y sabiendo que la forma de expresar la diferencial de una función es a partir del producto de la derivada por la diferencial de la variable independiente, se formulan las reglas para hallar las diferenciales, con sólo multiplicar cada una de las fórmulas anteriores por dx, como se muestra a continuación.

1. $d(c) = 0$	9. $d(\ln u) = \frac{du}{u}$
2. $d(x) = dx$	10. $d(a^u x) = a^u \ln a\, du$
3. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$	11. $d(e^u) = e^u\, du$
4. $d(cu) = c\, du$	12. $d(u^v) = vu^{v-1}\, du + u^v \ln u\, dv$
5. $d(u^n) = nu^{n-1}du$	13. $d(\text{sen } u) = \cos u\, du$

6. $d(u+v+w) = du + dv + dw$	14. $d(\cos u) = -\text{sen}\, u\, du$
7. $d(uv) = u\,dv + v\,du$	15. $d(\tan u) = \sec^2 u\, du$, etc.
8. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$	16. $d(\text{arc sen}\, u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, etc.

Así, tenemos que para encontrar la diferencial de una función, se halla la derivada y ésta se multiplica por dx. Observa los ejemplos:

Ejemplo

1. Halla la diferencial de:

$$y = \frac{x+3}{2x^2 - 3x - 1}$$

Derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2 - 3x - 1)(1) - (x+3)(4x-3)}{(2x^2 - 3x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 3x - 1 - (4x^2 + 9x - 9)}{(2x^2 - 3x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 3x - 1 - 4x^2 - 9x + 9}{(2x^2 - 3x - 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 12x + 8}{(2x^2 - 3x - 1)^2}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Diferencial:

$$dy = \frac{-2x^2 - 12x + 8}{(2x^2 - 3x - 1)^2}\, dx$$

2. Halla la diferencial de:

$$y = \ln\left(\sqrt{x+1}\right)^3 = \ln(x+1)^{3/2}$$

Derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^{3/2}}\left[\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}(1)\right]$$

$$= \frac{3}{2(x+1)}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Diferencial:

$$dy = \frac{3}{2(x+1)}dx$$

3. Halla la diferencial de:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}(2x^3)$$

Derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^3)^2}}(6x^2)$$

$$= \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$$

Diferencial:

$$dy = \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}dx$$

$$\text{arc sen}x = \operatorname{sen}^{-1}x \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$$

Ejercicio

En binas, realicen los siguientes ejercicios.

Comprueben en su libreta de apuntes que la diferencial dada es correcta, hallen previamente la derivada y anoten el resultado en el recuadro correspondiente.

Función	Derivada	Diferencial
$y = 3x^2 + 5x - 6$		$dy = (6x+5)dx$
$y = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$		$dy = \frac{2x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}dx$
$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$		$dy = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}dx$
$y = \frac{x+5}{x^3}$		$dy = -\frac{2x^3 - 15x^2}{x^6}dx$
$y = e^{\tan(2x)}$		$dy = 2\sec^2(2x)e^{\tan(2x)}dx$
$y = 5^{2x+1}$		$dy = 2(\ln 5)5^{2x+1}dx$
$y = (2x+1)^{2x+1}$		$dy = 2(2x+1)^{2x+1}\left[1 + \ln(x+1)\right]dx$

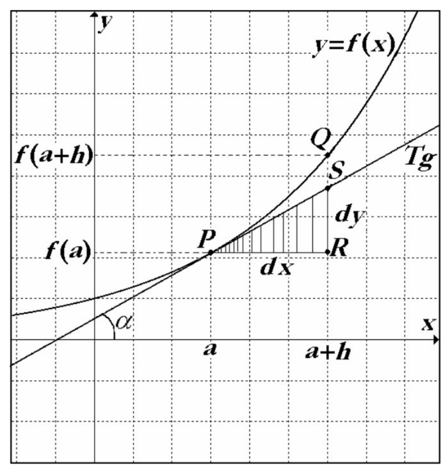
$y = \ln\cos\sqrt{x}$		$dy = -\dfrac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

Se ha mencionado que la diferencial puede aplicarse para encontrar una aproximación de ciertos valores, estimar el aumento o disminución de una longitud, un área o un volumen, o bien, determinar el error cometido al cambiar un valor por otro en una medición. Pero, ¿cómo se aplica? A continuación obtendrás la respuesta:

La diferencial como aproximación del incremento

Para determinar en una función la variación que hay en la variable dependiente y, cuando la variable independiente x cambia de un valor a otro, has aplicado el incremento Δy. Ahora podrás aplicar también la diferencial dy, tras advertir que la diferencial es una aproximación del incremento y puede ser sustituido el cálculo de Δy por dy.

Veamos:



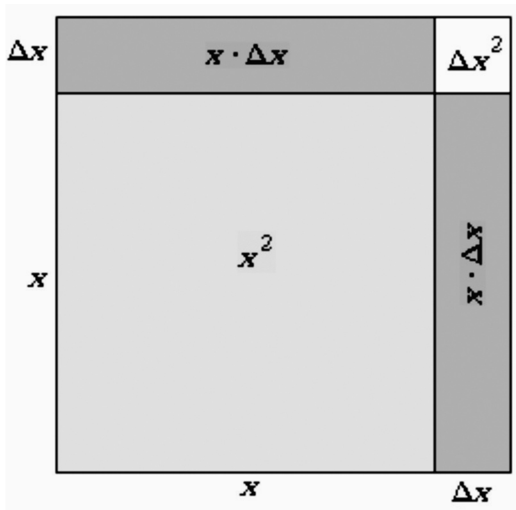
Observa otra vez la figura que muestra la interpretación geométrica de la diferencial, en ella puedes deducir con claridad que $\Delta y = \overline{RQ}$ y $dy = \overline{RS}$ son aproximadamente iguales cuando $dx = \overline{PR}$ es muy pequeña. Cuando es necesario encontrar un valor aproximado del incremento de una función conviene, en la mayoría de los casos, determinar la diferencial correspondiente y estimar su valor.

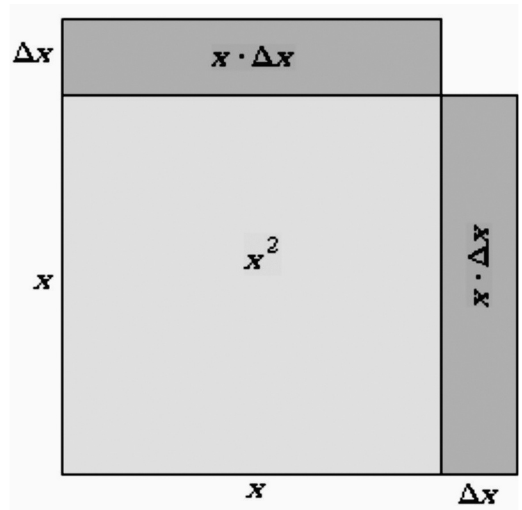
Advierte que al pasar x a $x + dx$, $f(x) = y$ pasa aproximadamente a $f(x) + f'(x)dx = y + dy$, lo cual implica que la fórmula que puede utilizarse para **aproximar** valores de una función es:

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx$$

O bien, puede representarse esta fórmula como $f(x+dx) \approx y + dy$.

Para la función $y = x^2$, una forma de explicar esta aproximación de la diferencial respecto al incremento es mediante el uso de cuadrados y rectángulos, como se muestra a continuación:





Donde: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$

$$= 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$= 2xdx + dx^2$$

Aquí:

$$\Delta y \approx 2x\Delta x = 2xdx = \frac{dy}{dx}dx = dy$$

$$\Delta y \approx dy$$

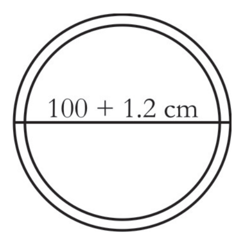
A continuación revisaremos algunos ejemplos en los que podrás percibir lo útil que es aplicar la diferencial al estimar un aumento o disminución de una función, o simplemente hacer una aproximación.

Ejemplo

1. Al calentar una lámina circular metálica de 1 m de diámetro, éste aumenta 1.2 cm. ¿Cuánto se incrementa aproximadamente su área?

Solución

La fórmula para calcular el área A de un círculo de diámetro d es:



$$A = \frac{1}{4}\pi d^2$$

El aumento en su área se tiene aproximadamente a partir del cálculo de la diferencial dA, donde dd = 1.2 cm y d = 100 cm.

$$dA = \left(\frac{1}{2}\pi d\right)d\,d = \frac{1}{2}\pi(100)(1.2) = 188.49$$

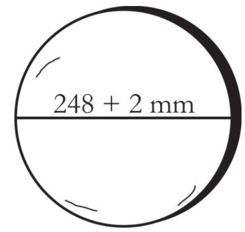
$$dA = 188.49 \text{ cm}^2$$

2. Comparar el volumen exacto con el volumen aproximado de una cáscara esférica de 250 mm de diámetro exterior y 1 mm de espesor.

Solución

La fórmula para calcular el volumen V de una esfera de radio r, o bien, diámetro d es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$$



Es claro que el volumen exacto de la cáscara es $\Delta V = -194{,}782.93\ \text{mm}^3$ (diferencia entre dos esferas macizas de diámetros de 250 mm y 248 mm respectivamente), y un valor aproximado de ΔV es dV, cuyo valor se determina como sigue:

La derivada de V respecto al diámetro es: $\dfrac{dV}{d\,d} = \dfrac{1}{2}\pi d^2$

entonces, la diferencial es: $dV = \dfrac{1}{2}\pi d^2 \cdot d\,d$

sustituyendo $d = 250$ mm y $d\mathbf{d} = 248$ mm – 250 mm = – 2 mm, se tiene:

$$dV = \frac{1}{2}\pi(250\ \text{mm})^2(-2\ \text{mm})$$

$$dV = -196349.54\ \text{mm}^3$$

Luego, el valor aproximado del volumen de la cáscara esférica es $196{,}250\ \text{mm}^3$ (despréciese el signo negativo, pues sólo indica que dV disminuye a medida que d aumenta).

Al comparar los dos resultados se aprecia que la aproximación es aceptable, pues,

$$\Delta V - dV = -194782.93\ \text{mm}^3 - \left(-196349.54\ \text{mm}^3\right) = -1566.61\ \text{mm}^3$$

Esto se debe a que $d\mathbf{d}$ es pequeño en comparación con $\mathbf{d}$.

3. Determinar por medio de incrementos y diferenciales en cuánto aumenta el área de un cuadrado de 2 m de lado, cuando éste se incrementa en 1 mm y comparar estos resultados por medio de una diferencia.

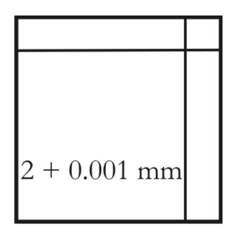
Solución

Se considera: área $A = x^2$, $x = 2$ y $dx = 0.001$

El incremento ΔA cuando x cambia de 2 m a 2.001 m es:

$$\Delta A = (2.001)^2 - (2)^2 = 4.004001 - 4 = 0.004001$$

$$\Delta A = 0.004001\, m^2$$



Y la diferencial dA es:

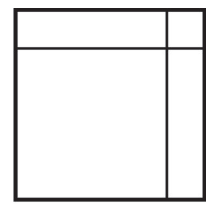
$$dA = 2x \cdot dx = 2(2)(0.001) = 0.004$$
$$dA = 0.004 \text{ m}^2$$

Al comparar estos resultados por medio de una diferencia se tiene:

$$\Delta A - dA = 4.004001 - 4.004 = 1\times 10^{-06}$$
$$\Delta A - dA = 1\times 10^{-06} \text{ m}^2$$

Con esta diferencia, se aprecia que la aproximación es aceptable.

4. Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumentó 0.04 cm. ¿Cuál es el aumento en su área?
¿Cuál es el aumento en su área aproximadamente? ¿Es aceptable la aproximación? ¿Por qué?



15 + 0.04 cm

Solución
Se considera: área $A = x^2$, $x = 15$ y $dx = 0.04$
El aumento en el área es el incremento ΔA cuando x cambia de 15 m a 15.04 cm, cuyo cálculo es:

$$\Delta A = (15.04)^2 - (15)^2 = 226.2016 - 225 = 1.2016$$
$$\Delta A = 1.2016 \text{ cm}^2$$

Y la diferencial dA es el aumento en el área aproximadamente:

$$dA = 2x \cdot dx = 2(15)(0.04) = 1.2$$
$$dA = 1.2 \text{ cm}^2$$

Esta aproximación es aceptable, ya que al efectuar la diferencia entre estos resultados se tiene:

$$\Delta A - dA = 4.004001 - 4.004 = 1\times 10^{-06}$$
$$\Delta A - dA = 1\times 10^{-06} \text{ m}^2$$

Con esta diferencia, se aprecia que la aproximación es aceptable.

En algunos casos estas variaciones se miden en porcentajes, para este ejemplo como 0.04 es 0.2666% de 15 y 1.2 es 0.5333% de $(15)^2 = 225$; por lo tanto, se concluye que si el lado de la placa se incrementa en 0.266%, el área aumentará aproximadamente 0.5333%.

5. Si al enfriarse una placa cuadrada metálica de 20 cm de lado, éste disminuye 0.03%, ¿en qué porcentaje disminuye su área?

Solución
0.03 % de 20 es:

$$\frac{(0.03)(20)}{100} = 0.006$$

Se considera: área $A = x^2$, $x = 20$ y $dx = -0.006$

Así,

$$dA = 2x \cdot dx = 2(20)(-0.006) = -0.24$$

El resultado 0.24 de 400 es:

$$\frac{(0.24)(100)}{400} = 0.06$$

Esto indica que el área disminuye 0.06%.

6. Determinar un valor aproximado de *tan* 46° por medio de diferenciales.

Solución

Se especifica la función $y = \tan x$ y se halla su diferencial $dy = \sec^2 x\, dx$ y se descompone 46°, de manera que $x = 45°$ y $dx = 1°$.

A partir de que tan 45º = 1, sec 45º = $\sqrt{2}$ y $1º = \frac{\pi}{180}\text{rad} = 0.0175\text{rad}$, se obtiene:

$$y = \tan(45º) \qquad \text{y} \qquad dy = (\sec 45º)^2\,(0.0175)$$

$$y = 1 \qquad\qquad dy = \left(\sqrt{2}\right)^2 (0.0175)$$

$$= (2)(0.0175)$$

$$dy = 0.0350$$

Así,

Fórmula:	$f(x + dx) \approx y + dy$
Sustitución:	tan 46º = tan (45º + 1) ≈ 1 + 0.035
Aproximación:	tan 46º ≈ 1.035

Si buscas el resultado de *tan* 46° en las tablas trigonométricas o en la calculadora científica encontrarás que tan 46°= 1.0355.

7. Estimar el valor de cos 59°.

Solución

Se especifica la función $y = \cos x$ y se halla su diferencial $dy = \text{sen } x\, dy$.

Se descompone 59° de manera que $x = 60°$ y $dx = –1°$. Luego, se tiene:

Fórmula:	$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)\, dx$
Sustitución:	cos 59º = cos (60º — 1º) ≈ cos 60º + sen (60º)(—1º)
	$\cos 59º \approx \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$
Aproximación:	$\sqrt{25.1} \approx 5.01$

8. Estimar el valor de $\sqrt{25.1}$.

Solución
Se especifica la función $f(x)=\sqrt{x}$ y se halla su diferencial $d\,f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Se descompone 25.1 de manera que $x = 25$ y $dx = 0.1$. Luego, se tiene:

Fórmula:	$f(x+dx)\approx f(x)+f'(x)dx$
Sustitución:	$\sqrt{25.1}=\sqrt{25+0.1}\approx 5+\dfrac{1}{2\sqrt{25}}(0.1)=5+0.01$
Aproximación:	$2\sqrt{25.1}\approx 5.01$

Este resultado aparece en la calculadora como tan 46°= 1.0355.

Ejercicio

1. Al calentar una lámina circular metálica de 50 cm de diámetro, éste aumenta 2 cm. ¿Cuánto se incrementa su área aproximadamente?

2. Calcula el volumen aproximado de una cáscara esférica de 15 cm de radio exterior y 0.05 cm de espesor.

3. Encuentra el valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de 200 mm de diámetro exterior y 1 mm de espesor.

4. Determina cuánto aumenta aproximadamente el área de un cuadrado de 1 m de lado, cuando éste aumenta 5 mm.

5. Al calentar una placa cuadrada metálica de 25 cm de longitud, su lado aumentó 0.5 cm. ¿Cuánto se incrementó su área? ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área? ¿Es aceptable la aproximación?

6. Se enfría una placa cuadrada metálica de 60 cm de lado, disminuyendo éste 0.02%. ¿Cuál es el porcentaje que disminuye su área?

7. Usa diferenciales para determinar un valor aproximado de a) *sen* 32°, b) *cos* 59°, c) *tan* 44°.

8. Estima el valor de (a) $\sqrt{16.1}$, (b) $\sqrt[4]{17}$, (c) $\sqrt[5]{1,020}$.

9. La pared lateral de un depósito cilíndrico de 1 m de diámetro y 1.5 m de altura debe revestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es aproximadamente la cantidad de concreto en kilómetros que se requiere?

10. Si un aviador vuela alrededor del mundo a una altura de 3.2 km sobre el Ecuador, ¿cuántos kilómetros más recorre que una persona que hace su viaje a lo largo del Ecuador?

11. Calcula aproximadamente el cambio en la superficie total de un cono circular recto, si el radio de 1 m permanece constante y su altura de 1.5 m cambia a 2 m.

Errores pequeños

Otra aplicación de la diferencial, como ya se mencionó, se da cuando se necesita estimar el error cometido en una medición.

A tu alrededor es necesario determinar mediciones físicas, en ocasiones ha de considerarse el *valor exacto* que es el valor medido o calculado, pero hay veces que se presenta un margen de error en la medida, y entonces se tiene un *valor aproximado*.

La diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto de una medida (incremento) es el error cometido en dicha medida, llamada error absoluto, y una aproximación de éste puede determinarse por la diferencial; tal como se muestra:

Definición

Si la función $y = f(x)$ representa una medida física, su diferencial $dy = d\,f(x)$ es una **aproximación del error absoluto** de dicha medida.

Para estimar si la aproximación del error absoluto es aceptable o no, éste se compara con el valor exacto, como se indica en la siguiente definición.

Definición

El **error relativo** es la razón entre la aproximación del error absoluto y el valor exacto, así:

$$\frac{dy}{y} = \frac{df(x)}{f(x)} = \text{error relativo}$$

Se considera que el error absoluto es aceptable si el error relativo es pequeño.

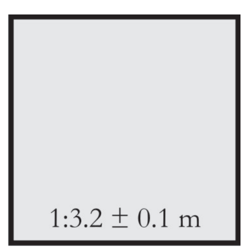
El error relativo puede expresarse en porcentaje, para ello bastará multiplicarlo por 100; es decir:

$$\frac{dy}{y}(100) = \text{error relativo expresado en porcentaje.}$$

Ejemplo

En los siguientes ejemplos podrás comprender la importancia de aplicar la diferencial, a partir de conocer el error cometido en una medición.

1. Hallar la aproximación del error absoluto cometido al calcular el área del piso de un cuarto cuadrado que mide de lado 3.2 ± 0.1 m y que se desea alfombrar.



Solución
Se considera: área $A = x^2$, $x = 3.2$ y $dx = 0.1$

El valor aproximado del error absoluto en el área es la diferencial dA,

$$dA = 2x\,dx = 2(3.2)(0.1) = 0.64$$

$$dA = 0.64 \text{ m}^2$$

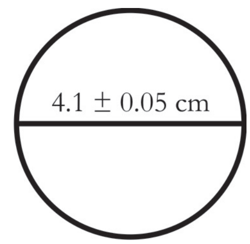
2. Hallar el valor exacto y los errores absoluto y relativo obtenidos al calcular el área de un círculo, si al medir su diámetro se halla que es 4.1 cm, con un máximo error de 0.05 cm. Aplicar la fórmula para determinar el área a partir del diámetro. Estimar si el margen de error es aceptable.

¿Sabías que...?

En la práctica, el valor exacto se desconoce, por lo que se toma como tal el medido o calculado.

Solución

La fórmula para calcular el área A de un círculo de diámetro d es:



$$A = \frac{1}{4}\pi d^2$$

El valor exacto de A se tiene cuando $d = 4.1$; entonces,

$$\textbf{Valor exacto}: A = \frac{1}{4}\pi(4.1)^2 = 13.195$$

El error absoluto con que se obtiene A es el incremento ΔA cuando d cambia de 4.1 cm a 4.15 cm, es decir:

$$\text{Error absoluto: } \Delta A = \frac{1}{4}\pi(4.15)^2 - \frac{1}{4}\pi(4.1)^2 = 13.519 - 13.195 = 0.324$$

Un valor aproximado del error absoluto en el área es la diferencial dA:

$$dA = \frac{1}{2}\pi d \cdot d\,\mathbf{d} = \frac{1}{2}\pi(4.1)(0.05) = 0.321$$

Luego, el error relativo es:

$$\textbf{Error relativo}: \frac{d\mathbf{A}}{\mathbf{A}} = \frac{0.321}{13.195} = 0.024, \text{ o bien, } 2.4\%$$

Como el resultado del error relativo es pequeño, se estima que el error cometido es aceptable.

Ejercicio

1. Halla el valor exacto y los errores absoluto y relativo obtenidos al calcular el volumen de un cubo de 20 cm de arista, con un máximo error en la medida de ésta de 0.02 cm.

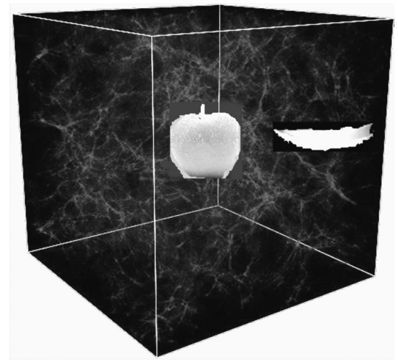
2. Calcula el error absoluto y relativo cometido en el cálculo del volumen de una esfera, si su diámetro mide 12.5 ± 0.1 mm.

3. Si decimos que $\sqrt{0.80}$ es $0.9 = \sqrt{0.81}$. ¿Cuál es la aproximación del error absoluto?, ¿cuál es el error relativo?

4. La velocidad adquirida por un objeto que cae libremente una distancia de 100 m a partir del reposo, está dada por $v = \sqrt{64.4\,h}$ m/s. Calcula el error en v debido a un error de 0.5 m al medir la altura.

5. Determina en cuánto aumenta el área de un cuadrado de 2 m de lado, mientras éste aumenta en un milímetro. Calcula el error absoluto, una aproximación de éste y el error relativo.

1.2 LA INTEGRAL INDEFINIDA



¿Hay una imagen más familiar que una manzana? Pero verla caer a la misma velocidad que una pluma en el vacío no lo es tanto. Galileo Galilei fue el primero en enunciar esta ley: "Todos los cuerpos en el vacío caen con la misma velocidad". Si se conoce la velocidad de caída puede calcularse el espacio recorrido. El proceso que permite pasar de la velocidad (derivada) al espacio o desplazamiento (función primitiva) se llama integración.

Desde tu primer acercamiento a las matemáticas, has resuelto operaciones de tal modo que al separarlas de dos en dos, en el orden que las fuiste estudiando, se tienen operaciones mutuamente inversas; por tanto, se tienen:

- Suma y resta.
- Multiplicación y división.
- Elevar a una potencia y extraer raíz.

También has hallado funciones inversas, como:

$$y = x^2 + 4 \text{ es } x = \pm\sqrt{y-4};$$

$$y = \log_a x \text{ es } x = a^y;$$

$$y = \cos x \text{ es } x = \cos^{-1} x = arc\cos x.$$

En el curso anterior se estudió cómo puede obtenerse la función derivada, a partir de una función derivable. Esta operación derivada se expresa por:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

Ahora, surge la pregunta ¿hay una operación inversa a la derivada?; es decir, dada una función $f(x)$, ¿existe otra función $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$?

O bien, puesto que en cálculo integral se han empleado ya diferenciales, esta interrogante puede plantearse como: ¿hay una operación inversa a la diferencial?. Es decir, dada una función $f(x)$, ¿existe otra función $F(x)$, tal que $F'(x)dx = f(x)dx$?

Veamos:

Si $f(x) = 2x$, entonces puede ser $F(x) = x^2$.
Si $f(x) = 3x^2$, entonces puede ser $F(x) = x^3 + 1$.

Si $f(x) = 4x^2$, entonces puede ser $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5$.

Así también,

Si $f(x)dx = 2x\,dx$, entonces puede ser $F(x) = x^2$.
Si $f(x)dx = 3x^2dx$, entonces puede ser $F(x) = x^3 + 1$.
Si $f(x)dx = (4x^2 + x)dx$, entonces puede ser $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5$.

Actividad

¿Antiderivada?

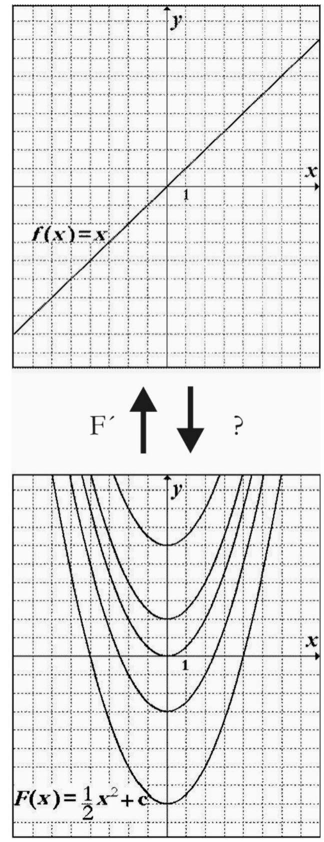
I. Organizados en binas y haciendo uso de su formulario de derivadas y diferenciales, completen la línea y den respuesta a las preguntas.

1. 1 es la derivada de ____________, y $1\,dx$ es la diferencial de ____________
2. $2x$ es la derivada de ____________, y $2x\,dx$ es la diferencial de ____________
3. $3x^2$ es la derivada de ____________, y $3x^2dx$ es la diferencial de ____________
4. $3x^2 + 2x$ es la derivada de ____________, y $(3x^2 + 2x)\,dx$ es la diferencial de ____________
5. $-\frac{2}{x}$ es la derivada de ____________, y $-\frac{2}{x}dx$ es la diferencial de ____________
6. $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es la derivada de ____________, y $-\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ es la diferencial de ____________
7. $\frac{1}{x}$ es la derivada de ____________, y $\frac{1}{x}dx$ es la diferencial de ____________
8. e^x es la derivada de ____________, y $e^x\,dx$ es la diferencial de ____________
9. $-\cos x$ es la derivada de ____________, y $-\cos x\,dx$ es la diferencial de ____________
10. $\sec^2 x$ es la derivada de ____________, y $\sec^2 x\,dx$ es la diferencial de ____________
11. ¿Encontraste más de una respuesta para alguna de estas preguntas?
12. ¿Cuál tiene más respuestas?
13. ¿Cuál tiene menos respuestas?
14. Tienen respuesta para las cuestiones: ¿hay una operación inversa a la derivada?, ¿hay una operación inversa a la diferencial?
15. Previa investigación, ¿qué nombre recibe dicha operación inversa?

II. En plenaria, con el apoyo de tu profesor, verifiquen sus respuestas.

Con la actividad antes realizada, es evidente que sí hay una operación inversa a la derivada; éste es el contenido del tema.

Antiderivadas



Considera que tienes la ecuación:

$F'(x) = f(x)$

Así también,

$F'(x) = x = f(x)$

A partir de esto, ¿cuál es la función $F(x)$?, es decir, ¿qué función $F(x)$ cumple que su derivada sea x?

Como ya sabes, si derivas la función $F(x) = x^2$, obtienes $F'(x) = 2x$, así, dividiendo por 2, se tiene $F'(x) = x$ a partir de $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

A una función que cumple con estas características se le llama una **antiderivada** o **primitiva** de la función $f(x) = x$.

Se define que si $f(x)$ y $F(x)$ son dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función $F(x)$ es una función antiderivada o primitiva de $f(x)$, o simplemente una antiderivada o primitiva de $f(x)$, si $F(x)$ tiene por derivada a $f(x)$.

Esto es,

> Si $F'(x) = f(x)$,
> entonces $F(x)$ se denomina una **antiderivada** o **primitiva** de $f(x)$.

Definición

Esta definición puede darse también a partir de diferenciales, dado que $f(x)$ y $F(x)$ son dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función $F(x)$es una función antiderivada o primitiva de $f(x)$, o simplemente una antiderivada o primitiva de $f(x)$, si $F(x)$tiene por diferencial a $f(x)dx$.

Entonces,

> Si $F'(x)dx = f(x)dx$,
> entonces $F(x)$ se denomina una **antiderivada** o **primitiva** de $f(x)$.

Definición

La operación que permite obtener una antiderivada o primitiva $F(x)$, a partir de una función $f(x)$, recibe el nombre de **integración**; una **antiderivada** o **primitiva** también se denomina *Integral*.

Una función es **integrable** si existe $F(x)$ y $F(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx$ denotará cualquier antiderivada de $f(x)$.

El signo de integración $\int$ (S de suma) fue propuesto por Leibniz.

En la notación:

$$\int f(x)\,dx$$

$\int$ es el signo de Integral y se lee: "integral de".

$f(x)$ se denomina integrando.

La diferencial dx, indica que x es la variable de integración.

Puedes considerar que:

"La derivación y la integración son operaciones inversas".

Así como:

"La diferenciación y la integración son operaciones inversas".

Ejemplo

En cada uno de los siguientes ejemplos, se da la antiderivada o primitiva $F(x)$, su diferencial $F'(x)dx$ correspondiente y el planteamiento con el símbolo de integral.

Primitiva	Diferencial	Integral
1. $F(x) = x^3$	$F'(x)dx = 3x^2dx$	$\int 3x^2\,dx = x^3$
2. $F(x) = \text{sen } x$	$F'(x)dx = \cos x\,dx$	$\int \cos x\,dx = \text{sen } x$
3. $F(x) = \text{arc tan } x$	$F'(x)\,dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2}$

Completa la tabla determinando la diferencial de cada una de las primitivas que se indican y expresa el planteamiento con el símbolo de integral.

Primitiva	Diferencial	Integral
1. $F(x) = x$		
2. $F(x)\ x^4$		
3. $F(x) = \tan x$		
4. $F(x) = \text{arc sen } x$		

Primitiva	Diferencial	Integral
5. $F(x) = e^x$		
6. $F(x) = \ln x$		

Constante de integración

De lo anterior, se desprende que una función puede tener varias antiderivadas o primitivas. En la siguiente tabla se muestran algunas primitivas de la función $f(x) = 2x$, además se comprueba que $F'(x)dx = f(x)dx$, lo cual es representado a su vez por medio del símbolo de la integral.

Primitiva $F(x)$	**Diferencial** $F'(x)dx = 2x\,dx$	**Integral** $\int f(x)dx = F(x)$
$F(x) = x^2$	$F'(x)dx = 2x\,dx$	$\int 2x\,dx = x^2$
$F(x) = x^2 + 1$	$F'(x)dx = 2x\,dx$	$\int 2x\,dx = x^2 + 1$
$F(x) = x^2 + 5$	$F'(x)dx = 2x\,dx$	$\int 2x\,dx = x^2 + 5$
$F(x) = x^2 + 12$	$F'(x)dx = 2x\,dx$	$\int 2x\,dx = x^2 + 12$
$F(x) = x^2 - 3$	$F'(x)dx = 2x\,dx$	$\int 2x\,dx = x^2 - 3$
$F(x) = x^2 - 10$	$F'(x)\,dx = 2x\,dx$	$\int 2x\,dx = x^2 - 10$
$F(x) = x^2 +$ ____	$F'(x)dx = 2x\,dx$	$\int 2x\,dx = x^2 +$ ____

En general, dado que **c** es un número real cualquiera, la función $F(x) = x^2 + c$ es una primitiva para $f(x) = 2x$.

Luego, se sigue que:

$$F(x) = x^2 + c \qquad F(x)dx = 2x\,dx \qquad \int 2x\,dx = x^2 + c$$

La constante arbitraria **c** se denomina *constante de integración*.

Ejercicio

Encuentra cinco primitivas para cada función que se indica y escríbelas en la tabla verticalmente.

1. $f(x) = 3x^2$	2. $f(x) = 5x^4$	3. $f(x) = 2e^x$	4. $f(x) = \frac{1}{x}$	5. $f(x) = \sqrt{x}$

Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales

Cuando se conoce el valor de la integral para algún valor particular de la variable, es posible determinar el valor de la constante de integración **c** de la expresión diferencial a integrar.

Ejemplo

A continuación se muestran algunos ejemplos:

1. Se pide hallar la función cuya primera derivada sea $3x^2$ y tenga el valor de 12 cuando $x = 2$.

Solución:
De acuerdo con las condiciones del problema deberá encontrarse la integral de la diferencial $3x^2\, dx$.

Así, se tiene la expresión:

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + c$$

A partir de esto y con los valores otorgados se plantea que:

$$12 = x^3 + c$$

de donde:

$$\begin{aligned} 12 &= (2)^3 + c \\ c &= 12 - 8 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función buscada es:

$$x^3 + 4$$

2. Se pide hallar una primitiva $F(x)$ de $f(x) = 2x$, cuya gráfica pasa por el punto $P(1,3)$. Si pasa por el origen, ¿qué primitiva se obtiene?

Solución:

De acuerdo con las condiciones del problema, las primitivas de $f(x)$ son de la forma: $F(x) = x^2 + c$.

Como la primitiva pasa por $P(1, 3)$, se tiene $x = 1$ y $F(x) = 3$.

A partir de lo anterior:

$$\begin{aligned} 3 &= (1)^2 + c \\ 3 &= 1 + c \\ c &= 3 - 1 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primitiva buscada es:

$$F(x) = x^2 + 2$$

Si pasa por el origen, $c = 0$ y la primitiva es $F(x) = x^2$

3. Se pide hallar la función lineal que representa una recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto $P(0, 4)$.

Solución
Como la derivada de la función lineal es su pendiente, se tiene:

$$F'(x) = 2$$

De donde:

$$f(x) = 2x + c$$

Por pasar por el punto $P(0, 4)$, resulta $4 = c$.

Por lo tanto, la función buscada es:

$$F(x) = 2x + 4$$

Los problemas planteados hasta este apartado contienen funciones con un término cuya integral es inmediata, que se puede encontrar por simple inspección; más adelante aplicarás las reglas de integración en problemas de este tipo.

Ejercicio

Resuelve los siguientes problemas a partir de las condiciones iniciales dadas.

Hallar:

1. La función cuya primera derivada sea 5 y tenga el valor de 8 cuando $x = 1$.

2. La función cuya primera derivada sea 1 y tenga el valor de 3 cuando $x = 2$.

3. La función cuya primera derivada sea $2x$ y tenga el valor de 10 cuando $x = 3$.

4. La función cuya primera derivada sea $2x$ y tenga el valor de 8 cuando $x = 4$.

5. La función cuya primera derivada sea $3x^2$ y tenga el valor de 11 cuando $x = 2$.

6. La función integral de $3x^2$ que tenga el valor de 200 cuando $x = 6$.

7. Hallar una primitiva $F(x)$ de $f(x) = x$ cuya gráfica pasa por el punto $P(2, 3)$. ¿Y si pasa por el origen?

8. Hallar la función lineal que representa una recta cuya pendiente es $\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $P(0,4)$.

Significado geométrico de la constante de integración

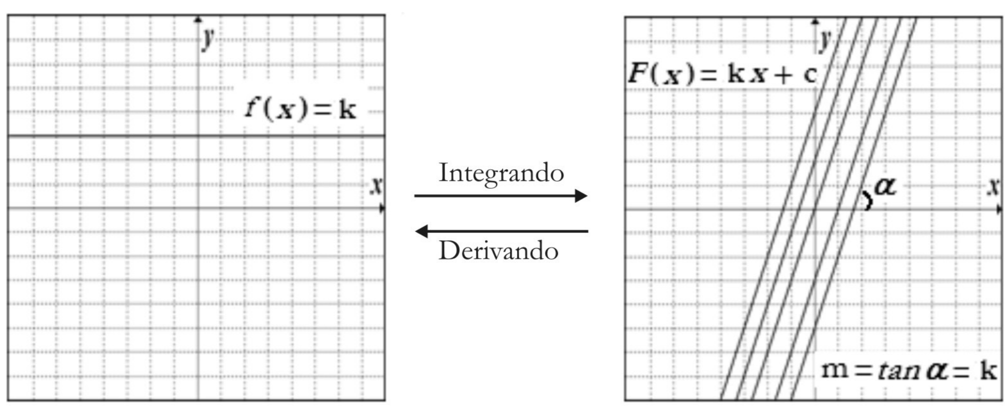
La constante de integración tiene tres significados: el significado analítico, antes abordado; el significado geométrico, el cual se muestra en este momento; y el significado físico, que se estudiará posteriormente.

Gráficamente, la Integral es una familia de funciones dependiente de la constante de integración cuyas gráficas se obtienen por translación de una primitiva dada.

Ejemplo

Observa y analiza los siguientes ejemplos.

1.



En el ejemplo (figura) se muestra una función constante $f(x) = k$, cuya integral es $F(x) = kx + c$.

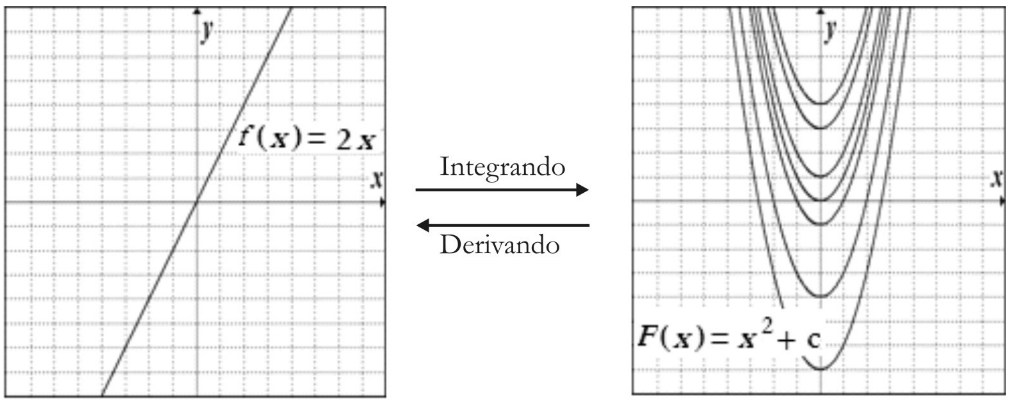
Si **c** (constante de integración) toma diferentes valores, obtenemos una función primitiva según el valor asignado a **c**:

c	0	– 1	– 2	1	2
$F(x) = kx +$ **c**	$F(x) = kx$	$F(x) = kx - 1$	$F(x) = kx - 2$	$F(x) = kx + 1$	$F(x) = kx + 2$

Cada una de estas funciones representa una recta que corta al eje y en 0, –1, –2, 1, 2 (que son los valores dados a **c**), y todas tienen la misma derivada; es decir, la misma pendiente.

Todas las rectas pueden obtenerse trasladando cualquiera de ellas a lo largo del eje y, ya que el valor de **c** no afecta la pendiente de la recta.

2.



Ahora se muestra la función lineal $f(x) = 2x$, cuya integral es $F(x) = x^2 + c$.

Si conferimos a **c** nuevamente diferentes valores, obtenemos la función primitiva correspondiente:

c	0	– 1	– 4	1	3
$F(x) = x^2 + c$	$F(x) = x^2$	$F(x) = x^2 - 1$	$F(x) = x^2 - 4$	$F(x) = x^2 + 1$	$F(x) = x^2 + 3$

Cada una de estas funciones representa una parábola que corta al eje y en 0, –1, –4, 1, 3 son los valores asignados a **c**, y todas tienen la misma derivada; es decir, la misma pendiente para el mismo valor de x.

Todas estas parábolas pueden obtenerse trasladando cualquiera de ellas a lo largo del eje y, ya que el valor de **c** no afecta la pendiente de la curva.

Actividad

Grafica $y = F(x) + e$

En equipos de trabajo, máximo de cuatro integrantes, realicen lo siguiente:

1. Determinen la ecuación en la forma $y = F(x) + c$, de ocho posibles curvas, cuya pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos sea x y calculen el valor de la pendiente de la recta tangente en cada una de las curvas para $x = 1$. Con los resultados obtenidos completen la siguiente tabla:

Ecuación de la curva	**Pendiente en $x = 1$**

2. Con base en los resultados obtenidos respondan las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué ecuación representa la familia de curvas cuya pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos es x? __________

   b) ¿Qué lugar geométrico representan estas curvas? __________

   c) ¿Qué lugar geométrico representa la pendiente? __________

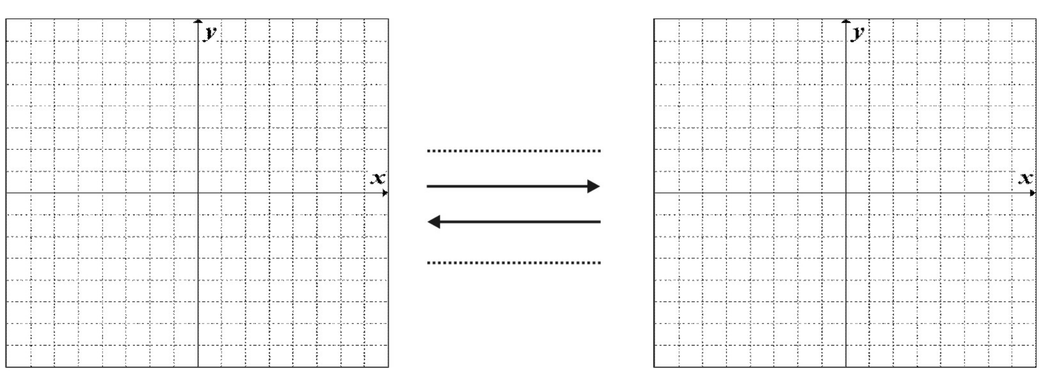
   d) ¿Cómo es el valor de la pendiente de la recta tangente de las curvas en $x = 1$? __________

   ¿Por qué? __________

   e) ¿Cuál será el valor de la pendiente de la recta tangente de las curvas en $x = 2$? __________

   ¿Y, en $x = -1$? __________

3. En el plano cartesiano de la izquierda representen las gráficas de las curvas cuyas ecuaciones señalaron en la tabla anterior; y en el otro plano, la gráfica de la función $f(x) = x$, que representa la pendiente. Indiquen en la línea punteada la operación que se sigue al pasar de una gráfica a otra, según la dirección de la flecha.



4. En un acetato copien una de las curvas que graficaron, a continuación deslicen el acetato verticalmente sobre el plano donde construyeron dichas curvas, haciendo coincidir la curva marcada en el acetato con cada una de las curvas trazadas en el plano. ¿Es posible hacerlo?

_______________ ¿Por qué? _______________

5. Monitoreados los equipos por su profesor, uno de ellos deberá exponer sus resultados frente al grupo.

Significado físico de la constante de integración

Físicamente se da significado a la constante de integración en problemas de movimiento uniformemente acelerado, movimiento de un proyectil, caída libre, entre otros.

Ejemplo

El siguiente ejemplo ilustra tal significado.

1. Halla las leyes que rigen el movimiento de un punto que se desplaza en línea recta con aceleración constante.

Solución:
Con base en los conocimientos de cálculo y física se tiene que la aceleración a es constante y se determina a partir de derivar la velocidad v; es decir,

$$\frac{dv}{dt} = \mathbf{a}$$

De donde:

$$dv = \mathbf{a}\, dt$$

Integrando se tiene:

$$v = \mathbf{a}\, t + c$$

Para determinar **c**, se supone a **v** como la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, así se tiene $v = v_0$ cuando $t = 0$.

Entonces:

$$v_0 = 0 + c$$
$$c = v_0$$

Luego se tiene una ley que determina la velocidad:

$$v = a\, t + v_0$$

También se tiene que la velocidad v se determina a partir de derivar la distancia s; es decir,

$$\frac{ds}{dt} = v$$

O bien:

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0$$

De donde:

$$ds = (at + v_0)\, dt$$

Integrando se tiene:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + c$$

Para determinar c, se supone a s como la distancia inicial s_0; de esta forma, $s = s_0$ cuando $t = 0$.

Entonces:

$$s_0 = 0 + 0 + c$$
$$c = s_0$$

Luego se tiene una ley que determina la distancia:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

Al sustituir $a = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = h$ en esta expresión y en $v = at + v_0$, se obtienen las leyes del movimiento de un cuerpo que cae en el vacío partiendo del reposo:

$$v = g\,t \quad \text{y} \quad h = \frac{1}{2} g t^2$$

A partir de estas ecuaciones se deduce también que:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Ejercicio

Resuelve los problemas planteados a partir del concepto de antiderivada.

1. Un tren parte de una estación de ferrocarril con una aceleración de $0.02 + 0.005t$ m/s^2. ¿Qué distancia recorrerá en 30 segundos?

2. Un móvil parte del origen de coordenadas, después de t segundos las componentes de su velocidad son $x = t^2$ y $y = 6t$.

a) Halla la posición del móvil después de 3 segundos y después de t segundos.
b) Halla la distancia recorrida en cada una de las trayectorias.

3. Se lanza una piedra desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 19.6 m/s. Hallar:

a) el tiempo en el que alcanza la altura máxima,
b) la altura máxima,
c) el tiempo en el que regresa al suelo,
d) la velocidad con la que llega al suelo,

4. Verifica que si $v = gt$ y $h = \frac{1}{2}gt^2$, entonces $v = \sqrt{2gh}$.

La integral indefinida y las reglas para la integración inmediata de diferenciales algebraicas, exponenciales y trigonométricas

Con fundamento en lo estudiado, podemos señalar que si conocemos una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$, se obtienen otras primitivas de $f(x)$ sumando a $F(x)$ un número real cualquiera.

En efecto,

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

A partir de lo anterior, si **c** desconocido e indefinido, la expresión $F(x) + c$ se denomina *integral indefinida*. Esto puede interpretarse como sigue:

El conjunto de las primitivas de una función se llama **Integral Indefinida.**

La integral indefinida cumple ciertas reglas o propiedades, las cuales son consecuencia inmediata de la derivación.

En el cálculo diferencial existe una regla general para obtener la derivada y la diferencial de una función dada; en el cálculo integral no se tiene una regla general como tal, que integre la expresión diferencial dada. En estos casos se utilizan tablas de integrales inmediatas en las que se compara la expresión diferencial a integrar con algún tipo de integral que muestra la tabla; si coinciden se conoce la integral, si no, se recurre a algún otro método que permita reducir la diferencial a una de las formas registradas en las tablas.

Por ahora sólo se estudiarán tales reglas de integración y las formas de las tablas de integrales inmediatas, según sea el tipo de función a integrar. Los métodos de integración a los que se ha hecho mención se abordarán más adelante.

Son dos las reglas de la integración que a su vez sirven para reducir expresiones diferenciales a integrales inmediatas:

¿Sabías que...?

En la práctica, la constante **c** se sobrentiende y puede no escribirse, además por abuso del lenguaje el nombre de integral indefinida puede indicar tanto el conjunto de primitivas como una de ellas. Es así que una primitiva o antiderivada puede denominarse Integral Indefinida.

Definición

I. *Integral del producto de un número por una función*

Se enuncia:	Fórmula:
La integral del producto de un número por una función es igual al número por la integral de la función.	$\int k\, f(x) dx = k \int f(x) dx$

Esta propiedad permite dejar las constantes dentro o fuera del signo de integración, según convenga.

Ejemplo

Observa los ejemplos:

1. $\int 7\, x^2\, dx \ = 7 \int x^2\, dx \ = 7\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{7x^3}{3} + c$

2. $\int 5\, e^x\, dx \ = 5 \int e^x\, dx \ = 5e^x + c$

3. $4 \int x^3 dx = \int 4x^3 dx = x^4 + c$

II. Integral de la suma algebraica

Se enuncia:	Fórmula:
La integral de una suma algebraica de funciones es igual a la misma suma algebraica de las integrales de dichas funciones.	$\int (f \pm g)x dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Ejemplo

Observa los ejemplos:

1. $\int (3\, x^2 + 2x - 1) dx = \int 3x^2 dx + \int 2x dx - \int dx\ x^3 + x^2 - x + c$

2. $\int (sen x - 1) dx = \int sen x\ dx + \int dx = -\cos x + x + c$

3. $\int (e^x + \cos x) dx = \int e^x dx + \int \cos x\ dx = e^x + sen\ x + c$

En algunas ocasiones, cuando se aplican estas dos propiedades, es conveniente descomponer el integrando al máximo:

$$\int \frac{x-1}{x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x - \ln x + c$$

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + x}{x^2} dx = \int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx = x^2 - x + \ln x + c$$

Tipo de función	**Formas**	
	Simple	**Compuesta**
Potencial $n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int (u)^n \cdot u' dx = \frac{(u)^{n+1}}{n+1} + c$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + c$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x + c$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int e^u \cdot u' dx = e^u + c$ $\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$
Seno	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int \cos(u) \cdot u' dx = \operatorname{sen}(u) + c$
Coseno	$\int \operatorname{sen} x dx = \cos x + c$	$\int \operatorname{sen}(u) \cdot u' dx = -\cos(u) + c$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = tg x + c$ $\int (1 + tg^2 x) dx = tg x + c$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg x + c$	$\int \sec^2(u) \cdot u' dx = tg\, u + c$ $\int (1 + tg^2(u)) \cdot u' dx = tg(u) + c$ $\int \frac{1}{\cos^2(u)} \cdot u' dx = tg\ u + c$
Cotangente	$\int \csc^2 x\ dx = -\cot x + c$ $\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$ $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \csc^2(u) \cdot u' dx = -\cot u + c$ $\int (1 + \cot^2(u)) \cdot u' dx = -\cot u' x + c$ $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u)} \cdot u' dx = -\cot u' + c$

Tabla de integrales inmediatas.

Ejemplo

A continuación, se resuelven integrales utilizando la tabla de integrales inmediatas.

1. $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c = \frac{1}{5} x^5 + c$

2. $\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{3x^3} + c$

3. $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}} + c$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + c = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c$

5. $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

$$\frac{m}{n} + 1 = \frac{m}{n} + \frac{n}{n} = \frac{m+n}{n}$$

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{u}{a}}{b} = \frac{b}{a} u$$

6. $\int (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{3} + c = \frac{1}{3}(x-1)^3 + c$

7. $\int (2x+1)(x^2+x-1)^{20}\,dx = \frac{(x^2+x-1)}{21} + c$

$\frac{du}{dx} = u'$

$\frac{du}{dx}dx = u'\,dx$

$du = u'\,dx$

8. $\int \text{sen}^5 x \cos x\,dx = \frac{\text{sen}^6 x}{6} + c = \frac{1}{6}\text{sen}^6 x + c$

9. $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\left(1-\text{sen}^2 x\right)dx$

$= \int \cos x - \cos x\ \text{sen}^2 x\,dx = \text{sen}x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + c$

10. $\int \frac{3}{x}dx = 3\int \frac{1}{x}dx = 3\ln|x| + c$

11. $\int 2e^{2x+1}dx = e^{2x+1} + c$

12. $\int -\text{tg}x\,dx = \int \frac{-\text{sen}x}{\cos x}dx = \ln|\cos x| + c$

13. $\int 5\ \text{sen}\ 5x\,dx = -\cos 5x + c$

14. $\int \frac{7}{\cos^2 x}dx = \int 7\sec^2 x\,dx = 7\int \sec^2 x\,dx = 7\text{tg}\,x + c$

15. $\int \sec^4 x\,dx = \int\left(1+\text{tg}^2 x\right)\sec^2 x\,dx = \int\left(\sec^2 x + tg^2 x\sec^2 x\right)dx = tg\ x + \frac{1}{3}tg^3 x + c$

Ejercicio

I. A partir de las reglas de integración y la tabla de integrales inmediatas antes mostrada, redacta tu propio formulario. Puedes cambiar en las formas compuestas, la expresión diferencial $u'\,dx$ por su expresión equivalente du.

II. Con base en tu formulario de integrales inmediatas, calcula la integral indefinida que se indica.

1. $\int x^6 dx =$
2. $\int 3x^4 dx =$
3. $\int x^{-5} dx =$
4. $\int \frac{1}{x^2} dx =$
5. $\int \frac{10}{x^5} dx =$
6. $\int -\frac{12}{x^4} dx =$
7. $\int x^{\frac{5}{3}} dx =$

8. $\int x^{\frac{-3}{7}}\,dx =$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^{11}}}\,dx =$

10. $\int \frac{5}{\sqrt{x^{6}}}\,dx =$

11. $\int \left(6x^{5}+\frac{2}{x^{8}}-\frac{9}{\sqrt{x^{9}}}\right)dx =$

12. $\int \left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{13}{5x^{3}}+\frac{21}{\sqrt[5]{x^{8}}}\right)dx =$

13. $\int (x+2)^{2}\,dx =$

14. $\int (x+3)^{5}\,dx =$

15. $\int \left(3x^{2}+1\right)^{3}\,dx =$

16. $\int 4(4x-1)^{7}\,dx =$

17. $\int (6x+5)\left(3x^{2}+5x+2\right)^{10}\,dx =$

18. $\int \operatorname{sen}^{3}x\cos x\ dx =$

19. $\int -\cos^{4} x\ \operatorname{sen} x\ dx =$

20. $\int \operatorname{sen}^{3}x\ dx =$

21. $\int \frac{3x^{2}+1}{x^{3}+x+5}\,dx =$

22. $\int \frac{x^{2}}{x^{3}+5}\,dx =$

23. $\int \cot\ x\ dx =$

24. $\int xe^{x^{2}}\,dx =$

25. $\int e^{x}\cos e^{x}\,dx =$

26. $\int \frac{8}{\operatorname{sen}^{2}x}\,dx =$

27. $\int \frac{\cos\ \ln|x|}{x}\,dx =$

28. $\int 3x^{2}\cos\left(x^{3}+9\right)dx =$

29. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}}\,dx =$

30. $\int \operatorname{tg}^2 x\ dx =$

III. Resuelve los siguientes problemas.

1. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $P(3,5)$ y que tiene pendiente $4x^2 - 2$ en cada punto (x,y).
2. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $P(2,3)$ y que tiene pendiente $3x^2 - x + 1$ en cada punto (x,y).
3. Se lanza una piedra desde el borde de un edificio, a 36.5 m de altura, con una velocidad inicial de 30 m/s.
   a) ¿A los cuántos segundos alcanza su máxima altura?
   b) ¿Cuál es su altura máxima?
   c) ¿A los cuántos segundos toca el suelo?
   d) ¿Con qué velocidad llega al suelo?

4. Un cohete se lanza hacia arriba desde el suelo y regresa al mismo después de 8 s.
   a) ¿Con qué velocidad fue lanzado?
   b) ¿Cuál fue su altura máxima?

Integración por sustitución trigonométrica de expresiones que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$; $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

Hay ocasiones en que el integrando contiene expresiones de las formas: $\sqrt{a^2-u^2}$ y $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ para los que no es posible aplicar las tablas de integración inmediata, es así que la estrategia para integrar tales expresiones es empleando tres clases principales de sustituciones trigonométricas efectuando la sustitución como a continuación se indica:

Si $\sqrt{a^2-u^2}$ ocurre en un integrando, hágase la sustitución $u = a$ sen θ

Si $\sqrt{a^2+u^2}$ ocurre en un integrando, hágase la sustitución $u = a$ tg θ

Si $\sqrt{u^2-a^2}$ ocurre en un integrando, hágase la sustitución $u = a$ sec θ

A partir de estas sustituciones, el signo del radical desaparece en cada caso.

Efectivamente:

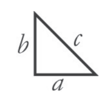
$$\sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = a\sqrt{1 - sen^2\theta} = a\cos\theta$$

$$\sqrt{a^2 + a^2 tg^2\theta} = a\sqrt{1 + tg^2\theta} = a\sec\theta$$

$$\sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2} = a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\,tg\,\theta$$

¿Sabías que...?

Del Teorema de Pitágoras se tiene:



$a^2 + b^2 = c^2$

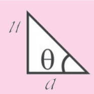
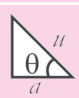
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$a = \sqrt{a^2 + b^2}$

Como podrás percatarte, los radicales $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ y $\sqrt{u^2 - a^2}$ se relacionan con un triángulo rectángulo, concretamente son las formas para calcular sus lados a partir del teorema de Pitágoras. De esta forma puede construirse un triángulo y asignarle la expresión que corresponda a cada lado a partir de cada radical. La función trigonométrica que ha de sustituirse en el radical se deriva del triángulo así construido.

La siguiente tabla te muestra el radical con la construcción del triángulo correspondiente y especifica la sustitución trigonométrica adecuada.

$\sqrt{a^2 - u^2}$	 $\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = \text{sen}\,\theta$	$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	 $\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a\,\text{tg}\,\theta$	$\sqrt{a^2 + u^2} = a\ \sec\theta$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$\sqrt{u^2 - a^2}$ 	$u = a\sec\theta$	$\sqrt{u^2 - a^2} = a\ tg\ \theta$

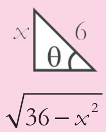
Ejemplo

Los ejemplos siguientes muestran el cálculo de integrales que contienen en su integrando alguna de estas formas.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\,dx =$

Solución:

De la forma del radical que tiene este integrando, resulta

Radical	Triángulo	Sustitución Trigonométrica	
$\sqrt{36-x^2}$		$x = 6$ sen θ De donde: $dx = 6 \cos\theta\, d\theta$	$\sqrt{36-x^2} = 6\cos\theta$

Luego, se sustituyen los valores correspondientes en la integral, obteniendo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx = \int \frac{(6\,sen\,\theta)(6\cos\theta\;d\theta)}{6\cos\theta}$$

$$= 6\int sen\,\theta\,d\theta$$

$$= -6\cos\theta + c$$

Ahora el resultado debe expresarse en términos de la variable x.

A saber del triángulo construido, $\cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{36-x^2}}{6}$

Por lo tanto:

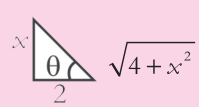
$$\int \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx = -6\left(\frac{\sqrt{36-x^2}}{6}\right) + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx = -\sqrt{36-x^2} + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} =$

Solución:

De la forma del radical de este integrando, se tiene:

Radical	Triángulo	Sustitución Trigonométrica	
$\sqrt{4+x^2}$		$x = 2$ tg θ De donde: $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$	$\sqrt{4+x^2} = 2\ \sec\ \theta$

Después se sustituyen los valores correspondientes en la integral, obteniendo:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\ d\theta}{4\,tg^2\theta(2\sec\theta)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta\ d\theta}{tg^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\ d\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{4}\int (\ sen\,\theta)^{-2}\cos\theta\ d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(\ sen\,\theta)^{-1}}{-1}\right) + c = -\frac{1}{4sen\,\theta} + c$$

Ahora el resultado debe expresarse en términos de la variable x.

A saber del triángulo construido, $\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{1}{4\left(\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} =$

Solución:

De la forma del radical de este integrando, se tiene:

Radical	Triángulo	Sustitución trigonométrica	
$\sqrt{x^2-9}$	$\sqrt{x^2-9}$ 	$x = 3\sec\theta$ De donde: $dx = 3\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$	$\sqrt{x^2-9} = 3\,tg\,\theta$

Luego, se sustituyen los valores correspondientes en la integral, obteniendo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\,tg\,\theta\ d\theta}{3\sec\theta(3\,tg\,\theta)}$$

$$= \frac{1}{3}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\theta + c$$

Ahora el resultado debe expresarse en términos de la variable x.

A saber del triángulo construido, $\cos\theta = \frac{3}{x}$

Así $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$

Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) + c$$

Ejercicio

I. Redacta tu tabla de integración por sustitución trigonométrica y anexa ésta a tu formulario de integrales inmediatas.

II. Utiliza el formulario de integrales que has ido construyendo y calcula la integral por sustitución trigonométrica que se indica.

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$
2. $\int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}} =$

$u^{3/2} = u \cdot u^{1/2} = u\sqrt{u}$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} =$
4. $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx =$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx =$
6. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} =$
7. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}} =$
8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} =$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}} =$
10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} =$
11. $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx =$ (usar dos métodos)

12. $\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} =$

Aplicaciones en administración y economía: costo total, ingreso total, y utilidad total

En el ámbito macroeconómico, una compañía necesita estimar cuántas unidades de un producto deben producir y el precio al que lo va a vender para alcanzar la máxima eficiencia: el costo marginal mínimo, el ingreso máximo y la utilidad máxima. Todos estos factores se pueden determinar mediante el uso de funciones matemáticas de costo, ingreso y utilidad, las cuales se pueden obtener por derivación o integración, según sea el caso.

Las siguientes funciones son los modelos usados en economía.

I. Para vender más unidades de un producto su precio debe ser menor, este fenómeno se representa por la **ecuación de demanda**:

$P = a \cdot Q + b$

Donde:

P: es el precio del producto.
a: pendiente de la ecuación de demanda (relación entre el precio del producto y su demanda).
Q: cantidad de productos obtenidos.
b: precio de venta para cero unidades y demanda nula (precio fijo).

II. A partir de la ecuación de demanda, y sabiendo que el ingreso total I equivale al producto del precio de venta y la cantidad de unidades vendidas ($I = P \cdot Q$), se obtiene la **función de ingreso total**:

$$I = (a \cdot Q + b) \cdot Q$$
$$I = aQ^2 + bQ$$

III. El mayor ingreso **IM** posible de un producto en un mercado definido podrá expresarse mediante la función de ingreso marginal, que se obtiene derivando la función de ingresos e igualando a cero tal derivada. Así, la **función de ingreso marginal es:**

$$\mathrm{IM} = 2aQ + b$$

Para obtener el máximo ingreso, se debe bajar el precio del producto con lo cual se incrementan las unidades vendidas, es decir, hasta que $2aQ + b = 0$.

IV. La que más se ajusta a la economía de escala y que muestra cómo varía el costo de cierto producto, según su escala de producción, es la **función de costo total C:**

$$C = C_aQ^3 + C_bQ^2 + C_cQ + C_d$$

Donde:

C_d: costo de producir cero unidades (costo fijo).
C_a, C_b, C_c, C_d: costos de diferentes unidades producidas.

V. La productividad óptima se puede obtener mediante el concepto de costo marginal **MC**, se obtiene derivando la función de costo. Así la **función de costo marginal es:**

$$\text{CM} = 3C_aQ^2 + 2C_bQ + C_c$$

VI. El costo unitario de un producto según la cantidad de unidades producidas lo determina el **costo medio CMe**, determinado por el cociente del costo total y la cantidad de unidades producidas (CMe = C/Q). Así,

$$\text{CMe} = (C_aQ^3 + C_bQ^2 + C_cQ + C_d)/Q$$

VII. La función de utilidad **U** total se obtiene determinando la diferencia entre el ingreso total y el costo total; por lo tanto:

$$U = I - C$$

VIII. La derivada de la función utilidad total será la función de utilidad marginal **UM**, la cual proporciona una buena aproximación de la ganancia o pérdida real resultante de la venta de las unidades Q +1, cuando se han vendido Q unidades.

Con base en las funciones expuestas, y considerando que la integración es la operación inversa de la derivación, se deduce que:

- Integrando la función que representa el costo marginal, se obtiene la función que representa el costo total.
- Integrando la función que representa el ingreso marginal, se obtiene la función que representa el ingreso total.
- Integrando la función que representa la utilidad marginal, se obtiene la función que representa la utilidad total.

Ejemplo

Los siguientes ejemplos muestran esta aplicación.

1. Una subsidiaria de una compañía electrónica fabrica una calculadora de bolsillo. La gerencia determinó que el costo marginal diario de producción de estas calculadoras (en dólares) está dado por CM = $0.0003x^2 - 0.16x + 40$, con un costo fijo de 3,000 dólares.

a) ¿Cuál es la función que determina el costo total?
b) ¿Cuál es el costo medio de producción en 200 calculadoras?

Solución:

a) La función de costo total está dada por la integral de la función de costo marginal. Así,

$$\int\left(0.0003x^2 - 0.16x + 40\right)dx = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + c$$

y como el costo fijo es **c =** 3,000 se tiene que la función de costo total es:

$$C = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 3000$$

b) Ahora, para calcular el costo medio se evalúa la función de costo total en $x = 200$, y se divide por él mismo, obteniendo:

$$\text{CMe} = 0.0001(200)^3 - 0.08(200)^2 + 40(200) + 3000 / 200$$
$$\text{CMe} = 8600 / 200$$
$$\text{CMe} = 43 \text{ dólares}$$

2. Supóngase que la función de ingreso marginal (en dólares) relacionada con la cantidad demandada x de un cierto sistema de sonido está dada por IM $= -0.04x + 400$ y el costo total de producción del modelo 2009 es $C = 100x + 200{,}000$.
a) ¿Cuál es la función que determina el ingreso total?
b) ¿Cuál es la ecuación de demanda?
c) ¿Cuál es la función que determina la utilidad total?
d) ¿Cuál es la función que determina la utilidad marginal?
e) Calcular UM (2,000) e interpretar el resultado.

Solución:

a) La función de ingreso total está dada por la integral de la función de ingreso marginal. Así:

$$I = -0.02x^2 + 400x$$

b) Puesto que $P = \dfrac{I}{Q}$, la ecuación de demanda es:

$$P = -0.02x + 400$$

c) Si sabemos que $U = I - C$, entonces:

$$U = \left(-0.02x^2 + 400x\right) - \left(100x + 200000\right)$$
$$U = -0.02x^2 + 300x - 200000$$

d) Derivando la función de utilidad total obtenemos la función de utilidad marginal:

$$\text{UM} = -0.04x + 300$$

e) Evaluando esta función para $x = 2{,}000$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\text{UM}(2000) &= -0.04(2000) + 300\\ &= 220\end{aligned}$$

Este resultado indica que la ganancia real obtenida por la venta de 2001 sistemas de sonido es de 220 dólares aproximadamente.

Ejercicio

I. Encuentra la función de costo total, según la función de costo marginal dada.

1. $\text{CM} = 0.02x^2 + 5x$; el costo fijo es de \$15.

2. $\text{CM} = x^2 - 100x + 2{,}500$; el costo fijo es de \$5,000.

3. $\text{CM} = x^2$; 15 unidades cuestan \$1,500.

4. $\text{CM} = -0.033x^2 + 25$; 5 unidades cuestan \$250.

5. La función de utilidad marginal por la venta de x cientos de artículos de una marca es $\text{UM} = 4 - 5x + 2x^2$, y cuando ningún artículo se vende es de $-\$50$. ¿Cuál es la función que determina la utilidad total?

6. Una empresa fabrica refresco de 3 litros. La gerencia determinó que el costo marginal diario de producción de estos refrescos (en pesos) está dado por: $\text{CM} = 0.0006x^2 - 0.4x + 10$, con un costo fijo de \$5,000.
   a) ¿Cuál es la función que determina el costo total?
   b) ¿Cuál es el costo medio de producción en 100 refrescos?

7. Supóngase que la función de ingreso marginal (en dólares), relacionada con la cantidad demandada x de un sistema de cierto producto, está dada por $\text{IM} = -0.02x + 300$ y el costo total de producción de una cierta marca es:
   $C = 0.000003x^3 - 0.04x^2 + 200x + 10{,}000$.
   a) ¿Cuál es la función que determina el ingreso total?
   b) ¿Cuál es la ecuación de demanda?
   c) ¿Cuál es la función que determina la utilidad total?
   d) ¿Cuál es la función que determina la utilidad marginal?
   e) Calcular UM (5000) e interpretar el resultado.

Auto evaluación

I. Define los siguientes conceptos:

Diferencial: ____

____

Antiderivada: ____

____

II. Calcula las diferenciales de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 + 2x + 5$
2. $y = \sqrt{2x+1}$
3. $y = 4e^{3x}$
4. $y = \ln\left(x^2+1\right)$
5. $y = \ln\left(1-\text{sen}^2 x\right)$

III. Completa la tabla horizontalmente, según la función que se indica.

	x	Δx	dx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
$y = 4x^2 + 5x - 9$	1	0.002				
$y = 5x^2 + 3x$	2	0.03				
$y = 2x^2 - 3$	3	0.005				
$y = \frac{x+1}{x}$	1	0.0001				

IV. Encuentra la aproximación del error absoluto cometido al calcular el área de un cuarto cuadrado que mide de lado 4 ± 0.05 m y se desea alfombrar.

V. Encuentra el valor exacto y los errores absoluto y relativo obtenidos al calcular el volumen de un tambo de agua en forma cilíndrica, si tiene una altura de 1m y su radio mide 35 ± 0.3 cm.

VI. Encuentra una antiderivada para la función que se indica.

1. $f(x) = 2x^2 - x + 6$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$
3. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{5}{3\sqrt{x}}$
4. $f(x) = \sqrt{x^5} - x^{-2}$
5. $f(x) = (x - 5)^2$
6. $f(x) = (x - 1)\,(3x - 4)$
7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{2\sqrt{x}}$

VII. Determina la primitiva atendiendo a las condiciones iniciales que se indican.

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ $\quad F(2) = 5$
2. $f(x) = \cos x$ $\quad F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

VIII. Calcula la integral que se indica.

1. $\int \left(4x^2 - 5x + 1\right) dx$
2. $\int \left(x^2 + 1\right)^2 dx$
3. $\int \left(7\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx$
4. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}\, dx$

IX. Se sabe que un árbol crece de tal forma que después de t años su altura $h(t)$ cambia a razón de $h'(t) = 0.2t + t^{1/2}$ pies/año. Si el árbol tenía 1 m de altura cuando se plantó, ¿cuál será la altura después de 9 años?