UNIDAD 1

Funciones racionales

OBJETIVO

El estudiante:

- Resolverá problemas sobre funciones racionales, teóricos o prácticos, mediante el análisis del dominio, el rango y la determinación de posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, en un ambiente escolar que favorezca la reflexión de análisis y razonamiento práctico, así como el desarrollo de actitudes de responsabilidad, cooperación, iniciativa y colaboración hacia el entorno en el que se desenvuelve.

Competencia genérica a desarrollar:
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos a través de la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

Competencias disciplinares a desarrollar:

- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

INTRODUCCIÓN

En las unidades anteriores aprendiste cómo identificar los diferentes tipos de funciones, sus clasificaciones, su dominio, etc. En esta unidad conocerás las principales características de la función racional tales como su dominio, sus asíntotas y la variación inversa, que es su forma más sencilla y tiene varias aplicaciones en problemas cotidianos; también conocerás sus aplicaciones en la ciencia y en la tecnología.

NOMBRE DEL ALUMNO: ____

GRUPO: ________ NÚMERO DE LISTA: ________ ACIERTOS: ________

Auto evaluación

Contesta lo que se te pide.

1. Divide las siguientes cantidades:

a) $\frac{8}{2}$ b) $\frac{18}{3}$

c) $\frac{0}{5}$ d) $\frac{7}{0}$

2. Explica brevemente el resultado del inciso d del reactivo anterior.

____
____
____

3. Si una persona hace un par de zapatos en 1 día, ¿cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo par de zapatos dos personas?

____
____
____

4. Si te digo que el peso de una persona varía en proporción directa con su masa, ¿qué significa este enunciado?

____
____
____

5. Si te digo la presión varía en proporción inversa al área en que se aplica la fuerza, ¿qué nos indica este enunciado?

____
____
____

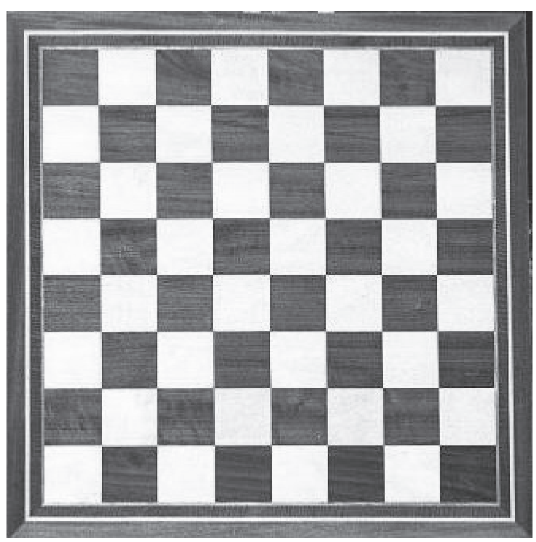
Situación problema

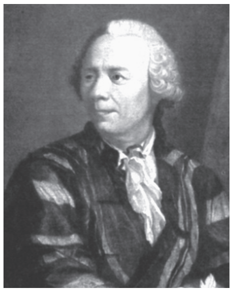
Los alumnos de ajedrez de la Escuela de Bachilleres Vespertina “Veracruz” desean construir un tablero de ajedrez gigante, el cual ocupará un área de 256 m^2. Para ello se forman dos equipos para pintarlo: el de los “lentos” y el de los “rápidos”. El equipo de los “rápidos”, que va a pintar los cuadros blancos, consta de cuatro integrantes y el de los “lentos” que pintará los cuadros negros, consta de 6 integrantes. En promedio, cada alumno “rápido” pinta un cuadro cada 2 horas y en promedio cada alumno “lento” pinta un cuadro cada 3 horas.

Suponiendo que cada equipo trabaja 8 horas diarias:

¿En cuánto tiempo pintará cada equipo los cuadros que le corresponden?
¿Cuántos elementos más necesita el equipo de los lentos para que terminen igual que el equipo de los rápidos?
Si quisiéramos que cada equipo terminara en la mitad del tiempo, ¿cuántos integrantes más tendremos que agregar a cada equipo?
¿Qué pasa con el equipo de los “rápidos” si deciden disminuir la cantidad de elementos que pinten?

Comenta tus respuestas con tus compañeros.





Leonhard Paul Euler

Considerado el más grande de los matemáticos del siglo XVIII, nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza y murió en San Petersburgo, Rusia el 18 de septiembre de 1783. Como matemático, realizó aportaciones con sus estudios sobre cálculo, teoría de gráficas, análisis matemático, la noción de función matemática, y como físico en el campo de la mecánica, óptica y astronomía.
A la edad de 13 años ingresó a la universidad de Basel, progresando rápidamente en el área de física y matemáticas. En parte, estos avances se dieron gracias a las lecciones privadas que tomó con el destacado matemático Johann Bernoulli.
Euler fue un científico tremendamente productivo: el índice de sus obras comprende más de 800 trabajos de investigación, publicados principalmente en las revistas de las más prestigiosas academias científicas en toda Europa.
Una de sus aportaciones más importantes fue la introducción del concepto de función.
Realizó destacadas contribuciones en la notación matemática, tales como:

Continua

3.1 FUNCIONES RACIONALES

3.1.1 Concepto de función racional

El estudio y conocimiento de las funciones racionales es muy importante para ti, principalmente porque existen fenómenos a tu alrededor que se pueden representar mediante este tipo de funciones. Además, en cursos superiores de cálculo diferencial o integral analizarás estas funciones y podrás determinar características de naturaleza más compleja que te permitan resolver otro tipo de problemas de la vida real.

Se entiende por función racional Al cociente de dos funciones polinomiales.

De manera general la representamos:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ donde } Q(x) \neq 0$$

donde P y Q son polinomios, x es una variable.

Dominio

Su dominio va a estar limitado precisamente por la condicionante $Q(x) \neq 0$. ¿Por qué?

La razón es que la división entre cero no está definida; es lo que llamamos una indeterminación, la cual representamos con el símbolo ∞. Sin embargo, esto no explica por qué cuando se presenta esta división afecta al dominio de la función racional; la razón radica sobre todo en la definición de dominio: "para que un valor de x pertenezca al dominio debe cumplir con la condición de que cada argumento debe arrojar una imagen real. Si no es así, entonces este valor de x no pertenece al dominio de la función". Y ∞ no es un número real, sino simplemente un símbolo que representa la indeterminación, por lo tanto es una imagen no real.

Cuando algún valor de x no pertenezca al dominio de la función, esto se verá reflejado en la gráfica de la misma, en un salto o en un corte. En la tabla se verá reflejado como una indeterminación o un error matemático, y en la expresión algebraica se presentará la división entre cero.

Para determinar el dominio de una función racional, podemos seguir los siguientes pasos:

a) Igualar con cero la expresión del denominador, justamente buscando aquellos valores de "x" que anulan al denominador y propician la división entre cero.
b) Resolver la ecuación resultante.
c) Los valores obtenidos los expresamos como aquellos que no pertenecen al dominio de la función racional.

a) $f(x)$ para referirse a la función f con respecto a la variable independiente "x".
b) La notación moderna de las funciones trigonométricas.
c) El uso de π (letra griega) para referirse al cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro.
d) La letra griega Σ como símbolo de las sumatorias.

Definición

e) La letra e o número de Euler como base del logaritmo natural o neperiano, número real cuyo valor se obtiene de la forma:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \approx 2.718281828$$

f) La letra i (latina) para hacer referencia a la unidad imaginaria.

Otros matemáticos dieron de Euler las siguientes referencias:
Johann Bernoulli: "Yo represento el análisis superior como si estuviera en su infancia, pero tú lo estás llevando a su estado adulto".
Pierre-Simon Laplace: "Lean a Euler, lean a Euler. Él es el maestro de todos nosotros".
André Weil: "Durante toda su vida ... parece haber llevado en la cabeza la totalidad de las matemáticas de la época, tanto puras como aplicadas".
El marqués de Condorcet dijo, en su discurso fúnebre: "todos los matemáticos son sus discípulos".

Continua

Ejemplo

Determinar el dominio de la siguiente función racional:

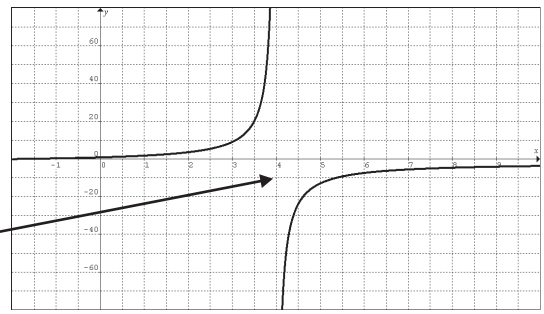
$$y = \frac{2x+3}{4-x}$$

a) Igualando con cero la expresión del denominador:
$4 - x = 0$

b) Resolviendo la ecuación resultante: $x = 4$

c) El dominio de la función $y = \frac{2x+3}{4-x}$, son todos los valores de $x \in R$, excepto $x = 4$; en intervalos, el dominio es: $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$
Veamos la gráfica de la función:

Podemos observar cómo se corta la gráfica de la función en $x = 4$



Comprobación:
Podemos sustituir el valor de "x" encontrado en la función y verificar que se presenta la indeterminación:

$$f(4) = \frac{2(4)+3}{4-4} = \frac{11}{0} = \infty$$

Comprobamos que $x = 4$. Efectivamente, no pertenece al dominio.

Ejemplo

Determinar el dominio de la siguiente función:

$$y = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - 15x}$$

a) Igualando con cero la expresión del denominador:
$x^3 - 2x^2 - 15x = 0$

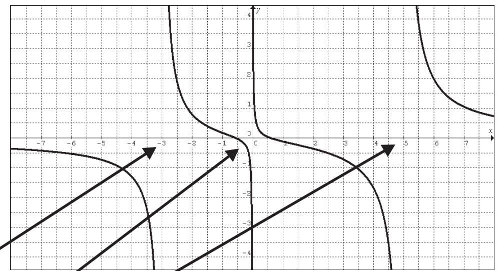
b) Resolviendo la ecuación resultante:

$$x^3 - 2x^2 - 15x = 0$$
$$x\left(x^2 - 2x - 15\right) = 0$$
$$x(x-5)(x+3) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = 0$$
$$x - 5 = 0$$

$x = -3$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $x = 5$

Su obra perdura en la actualidad y se dice que abarcaría aproximadamente unos 80 tomos.
En 1766 perdió el ojo derecho al hacer observaciones directas del Sol, tratando de descubrir un buen sistema de medición del tiempo, lo cual no lo detuvo en sus investigaciones. A la edad de 60 años perdió la vista por completo y, a pesar de ello, redactó casi un artículo por semana dictándolo a alguno de sus hijos o a algún colaborador.
Uno de sus más recientes reconocimientos —a casi 300 años de su nacimiento— fue el nombramiento en su honor del asteroide 2002 de la serie QQ1 como Asteroide Euler, el cual fue descubierto en 1973.
Tal vez todo esto no llame tu atención, pero fue hijo de un pastor y su madre también descendía de pastores: Sin embargo, además de toda la obra que hemos mencionado, tuvo tiempo de dedicarse a la mecánica, astronomía, óptica, acústica, arquitectura, balística, navegación, cartografía, construcción de instrumentos de precisión, música y filosofía. Incluso obtuvo la licenciatura en filosofía. También preparaba mapas y asesoraba a la Armada rusa, además de haber probado diseños de bombas contra incendios. Tuvo 13 hijos, aunque sólo cinco llegaron a edad adulta y sólo tres le sobrevivieron. Fue una persona de carácter amable y sencillo.

c) El dominio de la función $y=\dfrac{3x^2-1}{x^3-2x^2-15x}$ son todos los valores de $x \in R$, excepto $x=-3$, $x=0$, $x=5$; en intervalos, el dominio es: $(-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,5) \cup (5,\infty)$.
Veamos la gráfica de la función:



Observemos cómo la gráfica de la función se corta en $x=-3$, en $x=0$ y en $x=5$

Comprobación:

$$f(-3)=\frac{3(-3)^2-1}{(-3)^3-2(-3)^2-15(-3)}=\frac{27-1}{-27-18+45}=\frac{26}{0}=\infty$$

$$f(0)=\frac{3(0)^2-1}{(0)^3-2(0)^2-15(0)}=\frac{0-1}{0-0-0}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$$f(3)=\frac{3(5)^2-1}{(5)^3-2(5)^2-15(5)}=\frac{75-1}{125-50-75}=\frac{74}{0}=\infty$$

Comprobamos que $x=-3$, 0 y 5, efectivamente no pertenecen al dominio de la función.

Ejemplo

$$y=\frac{3x+3}{x^2+5x+4}$$

a) Igualando con cero la expresión del denominador:
$x^2+5x+4=0$

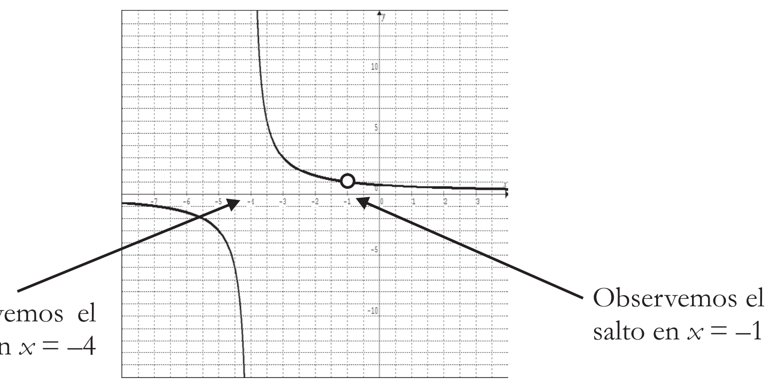
b) Resolviendo la ecuación resultante:

$$(x+4)(x+1)=0$$
$$x+4=0$$
$$x+1=0$$

$x=-4$ $\quad x=-1$

c) El dominio de la función $y=\dfrac{3x+3}{x^2+5x+4}$ son todos los valores de $x \in R$, excepto $x=-4$, $x=-1$; en intervalos, el dominio es: $(-\infty,-4) \cup (-4,-1) \cup (-1,\infty)$

Veamos la gráfica de la función:



La gráfica anterior muestra un corte y un salto, pero, ¿qué es un salto y cómo lo reconocemos? Como ya señalamos, cuando algún valor de x no pertenezca al dominio de la función, no sólo puede provocar en la gráfica un corte sino también un salto. Éste ocurre cuando uno de los factores del denominador aparece también en el numerador; dicho de otra manera, se le llama indeterminación no evitable al corte e indeterminación evitable al salto. Analicemos la función:

$$y = \frac{3x+3}{x^2+5x+4} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x+4)}$$

Al factorizar la función, observamos que tanto en el numerador como en el denominador se repite el factor (x + 1) y esto es lo que nos genera un salto, el cual —como se puede observar en la gráfica— es un pequeño hueco que deja el valor de "y" que falta en la gráfica de la función.

Comprobación:

$$f(-1) = \frac{3(-1)+3}{(-1)^2+5(-1)+4} = \frac{-3+3}{1-5+4} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$f(-4) = \frac{3(-4)+3}{(-4)^2+5(-4)+4} = \frac{-12+3}{16-20+4} = \frac{-9}{0} = \infty$$

Comprobamos que x = –1 y –4, efectivamente no pertenecen al dominio de la función.

Ejercicio

I. Dadas las siguientes funciones, determinar el dominio de la función. Además grafica cada función y encierra en color rojo los valores de "x" que no pertenecen al dominio de la función. Señala también si dichos valores de "x" provocan un corte o un salto.

1. $y = \dfrac{2x}{3x+6}$

2. $f(x) = \dfrac{2}{5x}$

3. $y = \dfrac{5x}{x-3}$

4. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-5x}$

5. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-8x+12}$

6. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3-4x}$

7. $y=\dfrac{5x}{x^3+7x^2+7x-15}$

8. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$

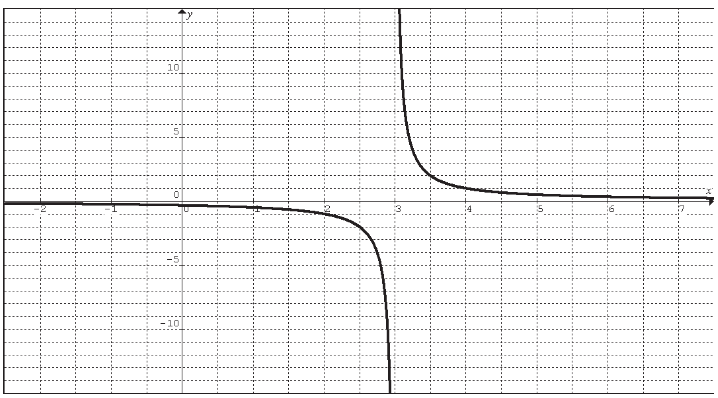
9. $y=\dfrac{x+3}{x^2+9x+18}$

10. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3+4x^2-17x-60}$

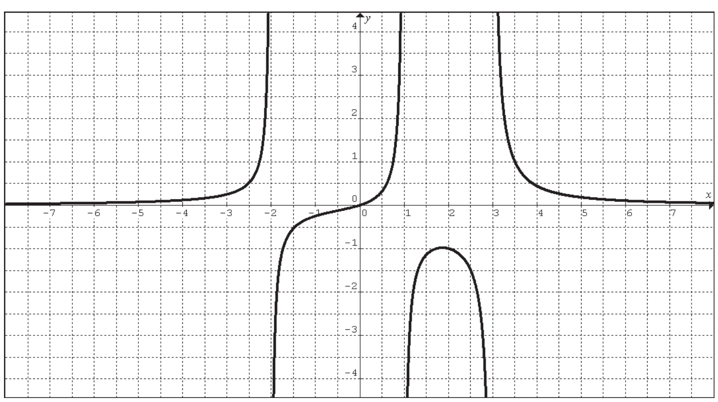
11. $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^3+4x^2+x-6}$

12. $f(x)=\dfrac{2x-5}{2x^2+9x-35}$

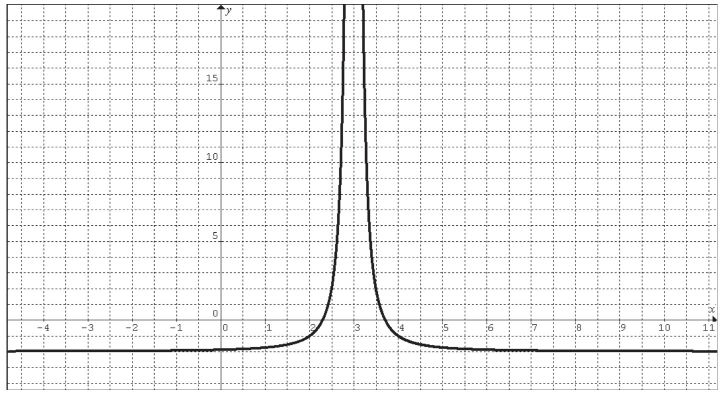
II. Dadas las siguientes gráficas, determina su dominio y escríbelo en las líneas debajo de cada gráfica. Se supone que muestran un comportamiento constante desde el $-\infty$ y terminan hasta el ∞ de los valores de "x".



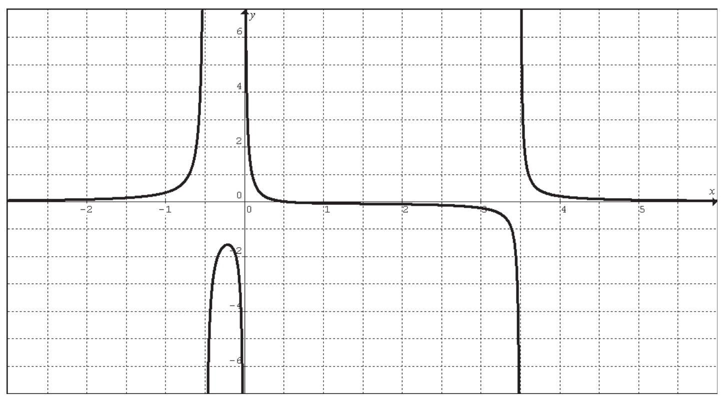
1. ____



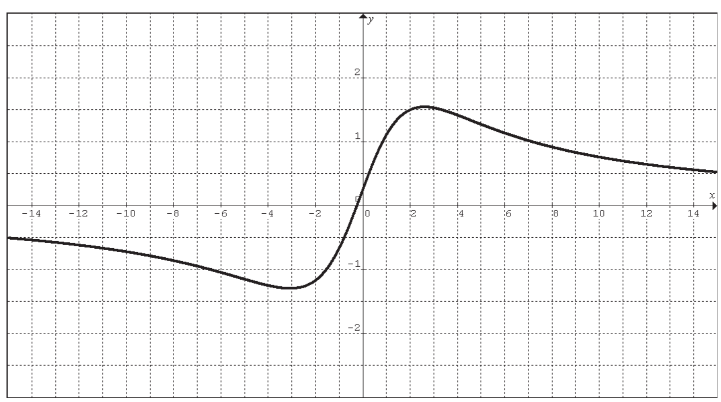
2. ____


y
15
10
5
0
x
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

3. ____


y
6
4
2
0
x
−2 −1 0 1 2 4 5

4. ____


y
2
1
0
−1
−2
x
−14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14

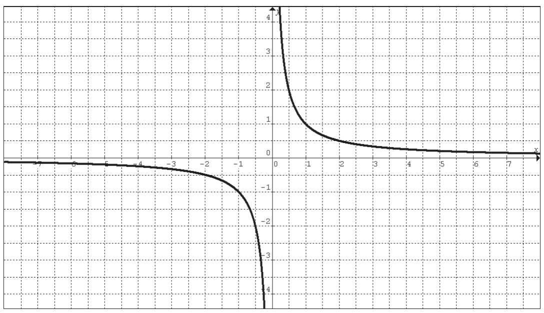
5. ____

3.1.2 Gráficas de funciones racionales

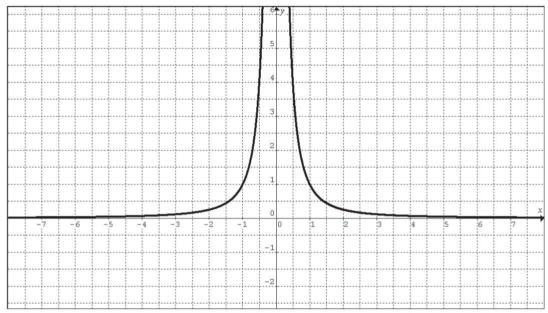
Las gráficas de las funciones racionales pueden tomar diversas formas, y aunque presentan ciertas regularidades que nos permiten hacer interpretaciones, su construcción puede ser laboriosa, y sin un conocimiento previo de sus características, fácilmente podríamos equivocarnos al trazar su gráfica, aun cuando hagamos una buena tabulación. Una de las características importantes es su dominio, por lo que ahora continuaremos con las asíntotas y las intersecciones con los ejes.

Observa las siguientes gráficas y después contesta las preguntas.

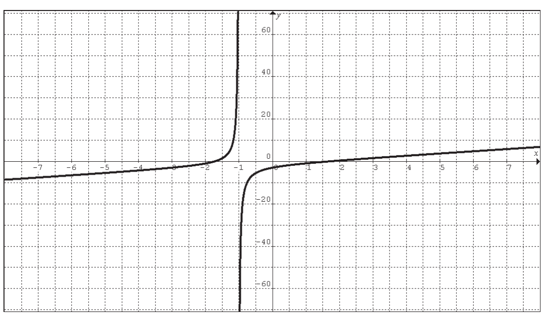
Gráfica 1



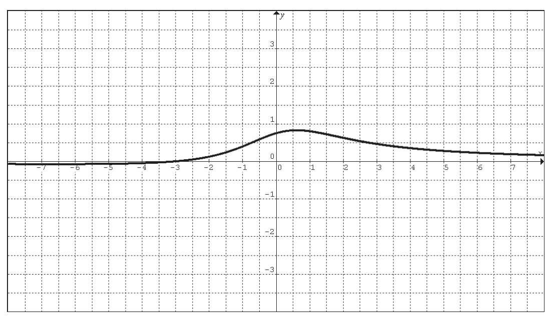
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



1. ¿Cuántos cortes presenta cada función?

___

___

___

2. ¿Qué pasa con la gráfica número 4?

___

___

___

Sabías que...

Una aplicación de la función racional es en la transformada *z* la cual convierte una señal que está definida en el dominio del tiempo discreto. Es decir, nos permite el procesamiento de algunas señales digitalizadas, el cual se realiza mediante circuitos digitales, microprocesadores y ordenadores.

3. ¿Por qué las rectas punteadas parecen dirigir la gráfica de la función?

4. ¿Crees que exista una relación entre el comportamiento de la gráfica de la función y la expresión algebraica? Explica tu respuesta.

Asíntotas

Definición

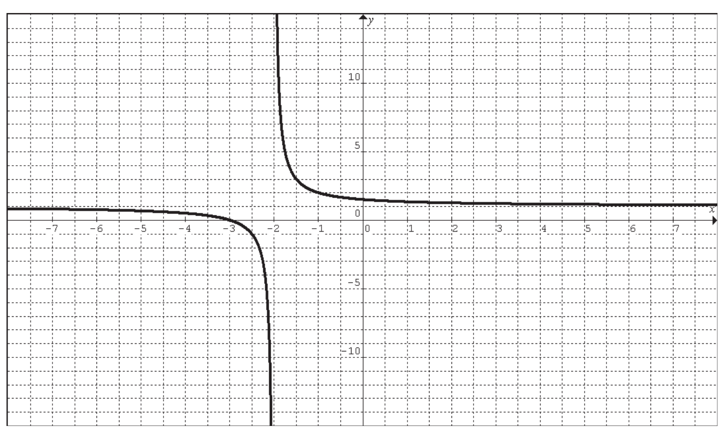
Una asíntota es una recta real o imaginaria a la que parece que se acerca la gráfica de la función, pero sin tocarla.

Existen tres tipos de asíntota y todas podemos calcularlas e identificarlas cuando se presenten: asíntota horizontal, asíntota vertical y asíntota oblicua.

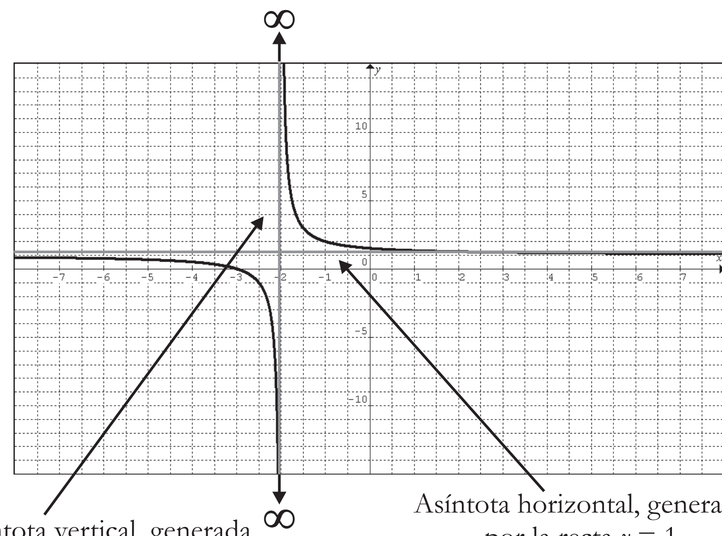
Una función puede tener varias asíntotas verticales, pero si tiene asíntota horizontal, no tendrá asíntota oblicua y si tiene asíntota oblicua entonces no tendrá asíntota horizontal.

Empecemos por observar cómo es el comportamiento de la gráfica para formar una asíntota.

Analicemos la gráfica de la función $y = \dfrac{x+3}{x+2}$



Esta función tiene una asíntota vertical en $x = -2$ y una asíntota horizontal en $y = 1$. En ambos casos las asíntotas son rectas imaginarias, porque no se ven a menos que las grafiquemos y las hagamos reales, como en la siguiente gráfica:



Ahora, ya podemos ver las asíntotas. Si observas la gráfica de la función, entre más grande es el valor de x parece que se va acercando a la recta $y = 1$ (asíntota horizontal). Tal vez debido a la gráfica, tus ojos se engañen y pienses que en realidad sí la está tocando; para evitar esta confusión, es mejor que tabulemos para entender la definición.

Entre más pequeño es el valor de "x", más se acercan las "y" a 1, pero nunca la tocan.

x	y
–1000	0.9989
–100	0.9897
–70	0.9852
–30	0.9642
–20	0.9444
–10	0.875
–9	0.8571
–8	0.8333
–7	0.8
–6	0.75
–5	0.6666
–4	0.5
–3	0
–2	∞

x	y
–1	2
0	1.5
1	1.33333
2	1.25
3	1.2

Entre más grande es el valor de "x", más se acercan las "y" a 1, pero nunca la tocan.

Continúa

Continuación

x	y
4	1.1666
5	1.1428
6	1.125
7	1.1111
20	1.0454
30	1.0312
70	1.0138
100	1.0098
1000	1.0009

Observamos que al comparar un número con otro, entre más pequeño es el valor de *x*, los valores se acercan a 1, y entre más grande es el valor de *x*, más se acercan los valores de "*y*" al valor de 1, pero nunca son igual a 1; si quisieras graficar estos valores, tendrías que trazar una recta muy fina y verías cómo se acercan los puntos a 1, pero nunca tocarían la asíntota.

Ahora, analicemos qué ocurre con la asíntota vertical. Primero observa cómo la asíntota se localiza en $x = -2$ y que la gráfica se corta formando dos "brazos": uno que baja hacia el infinito negativo de las "*y*" y el otro que baja del infinito positivo de las "*y*", pero en ambos casos pegándose la curva a la recta $x = -2$

x	y
–4	0.5
–3	0
–2.5	–1
–2.4	–1.5
–2.3	–2.333
–2.2	–4
–2.1	–9
–2.01	–99
–2.001	–999
–2.0001	–9999
–2.00001	–99999
–2	∞
–1.9999	10001
–1.999	1001
–1.99	101
–1.9	11
–1.5	3
–1.4	2.6666
–1.3	2.4285
–1.2	2.25
–1.1	2.1111

Valores de x cercanos a –2, pero antes de él.

Valores de x cercanos a –2, pero después de él.

Continúa

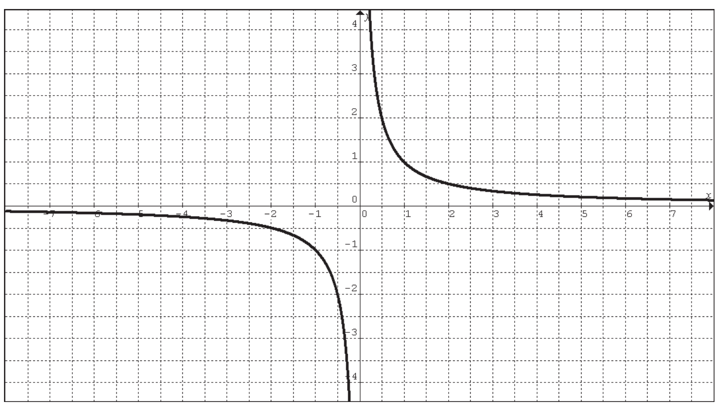
Continuación

x	y
–1	–1
0	1.5

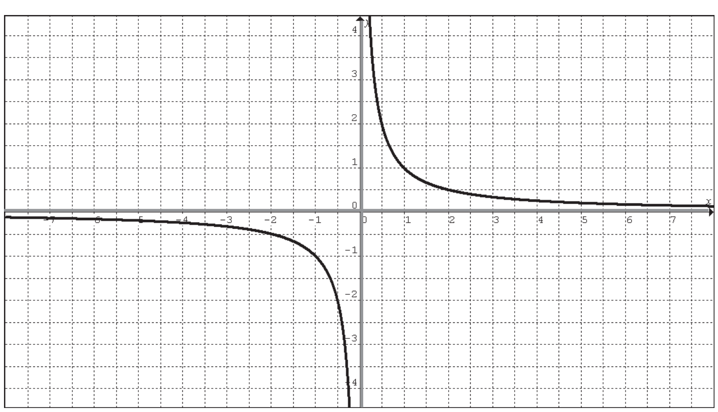
Puedes comprobar en la tabulación cómo se acercan los valores de "x" que están más cercanos al valor de –2, y antes de éste los valores son cada vez más pequeños, es decir, van decreciendo hacia el infinito negativo, mientras que los valores que están después de $x = -2$ observamos que regresan del infinito positivo, pero siempre en ambos casos tomando como asíntota a la recta $x = -2$

Con las asíntotas oblicuas ocurre lo mismo, pero en este caso la gráfica toma como asíntota a una recta cuyo ángulo de inclinación es diferente de 0°, 90° y 180°.

Sin embargo, la definición no sólo menciona rectas imaginarias, sino que también incluye rectas reales. Analicemos ahora la gráfica de la función: $y = \frac{1}{x}$



Esta función toma como asíntota vertical a la recta $x = 0$ y como asíntota horizontal a la recta $y = 0$. Como puedes observar, toma como asíntota tanto al eje "x" como al eje "y", que son dos rectas reales. Con esto completamos la explicación de la definición de asíntota.



En la gráfica ves resaltadas las asíntotas y puedes observar que éstas son los ejes "*x*" y "*y*".

Veamos el comportamiento asintótico ahora desde la perspectiva tabular. Empecemos con la asíntota horizontal:

Entre más pequeño es el valor de "*x*", más se acercan las "*y*" a 0 o, mejor dicho, al eje "*x*".

x	**y**
–1000	–0.001
–100	–0.01
–70	–0.0142
–30	–0.0333
–20	–0.05
–10	–0.1
–7	–0.1428
–6	–0.1666
–5	–0.2
–4	–0.25
–3	–0.333
–2	–0.5
–1	–1
0	∞

Entre más grande es el valor de "*x*", más se acercan las "*y*" a 0 o, mejor dicho, al eje "*x*".

x	**y**
0	∞
1	0.1
2	0.5
3	0.333
4	0.25
5	0.2
6	0.1666
7	0.1428
10	0.1
20	0.05
30	0.0333
70	0.0142
100	0.01
1000	0.001

Con la tabulación, comprobamos la asíntota horizontal. Ahora analizamos la asíntota vertical:

x	y
–2	–0.5
–1	–1
–0.5	–2
–0.4	–2.5
–0.3	–3.333
–0.2	–5
–0.1	–10
–0.01	–100
–0.001	–1000
–0.0001	–10000
–0.00001	–100000
0	∞
0.00001	100000
0.0001	10000
0.001	1000
0.01	100
0.1	10
0.2	5
0.3	3.333
0.4	2.5
0.5	2
1	1
2	0.5

Valores de x cercanos a 0 pero antes de él

Valores de x cercanos a 0 pero después de él

Se observa que alrededor de $x = 0$ los valores de "y" son extremadamente grandes, lo que indica una indeterminación, pero antes de cero la indeterminación es negativa y después de cero es positiva. Este comportamiento se comprueba con los "brazos" de la gráfica, lo cual nos indica que toma como asíntota al eje "y".

Matemáticamente es posible determinar con exactitud las diferentes asíntotas de una función y pueden comprobarse con la gráfica de la función, como veremos a continuación.

Sabías que...

Los conocimientos sobre las asíntotas de una función se aplican en niveles superiores, tales como en la determinación de los límites de una función y en general en cálculo.

Asíntotas verticales

Por regla general, se presentará una asíntota vertical en aquellos valores de "x" donde se presenta un corte en la gráfica de la función, por lo que su localización implica factorizar tanto el numerador como el denominador de la función y verificar dónde ocurre un "salto" y dónde ocurre un "corte". Dicho de otra manera, podemos usar la determinación del dominio de la función para localizar las asíntotas verticales.

Ejemplo

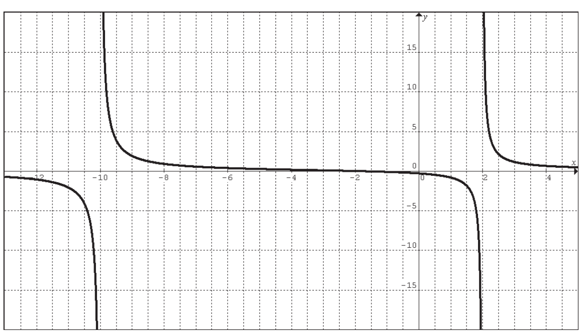
Determinar las asíntotas verticales de la función $y = \dfrac{3x+6}{x^2+8x-20}$; factorizamos tanto el numerador como el denominador, buscando verificar si existen "saltos" o no:

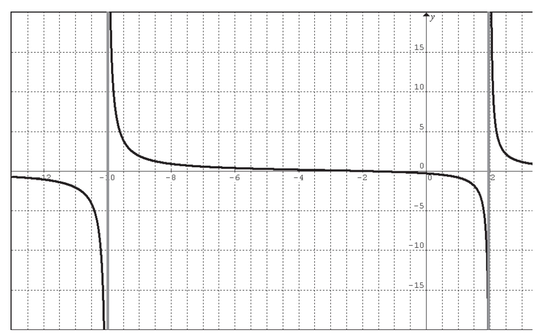
$$y = \frac{3x+6}{x^2+8x-20} = \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+10)}$$

Como puedes ver, tanto en el numerador como en el denominador no se repite ningún factor, por lo que podemos decir que esta función tiene dos "cortes" y, por lo tanto, dos asíntotas verticales. Ahora nos falta saber dónde están; para ello, igualamos con cero cada factor del denominador para hallar las ecuaciones que las forman:

$$\begin{aligned} (x-2)(x+10) &= 0 \\ x+10 &= 0 \\ x-2 &= 0 \\ x &= -10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Así, podemos concluir: la función $y = \dfrac{3x+6}{x^2+8x-20}$ tiene dos asíntotas verticales, una en $x = -10$ y otra en $x = 2$ y las ecuaciones de ambas son $x = -10$ y $x = 2$. Comprobemos con su gráfica:





En la gráfica de la izquierda podemos observar a la función con sus cortes, y en la de la derecha graficamos las rectas que conforman las asíntotas $x = -10$ y $x = 2$ y las hacemos visibles, lo que comprueba y confirma nuestro procedimiento matemático.

Ahora veamos un ejemplo donde se presente al menos un "salto".

Ejemplo

Dada la función $y = \dfrac{4x+8}{x^2+6x+8}$, determinar sus asíntotas verticales.

Factorizando, observamos:

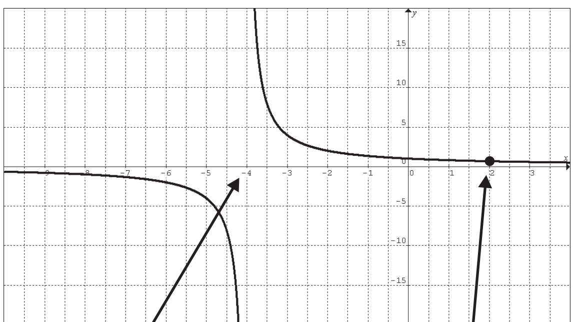
$$y = \frac{4x+8}{x^2+6x+8} = \frac{4(x+2)}{(x+2)(x+4)}$$

Se puede observar que el factor (x + 2) se repite tanto en el numerador como en el denominador, por lo que sabemos que ahí ocurre un salto y no hay una asíntota vertical. En el factor (x + 4) ocurre un corte, y en consecuencia la gráfica de la función presenta una asíntota vertical. Igualamos con cero el factor (x + 4) y determinamos el valor de "x" donde se presenta la asíntota:

$$x+4=0$$

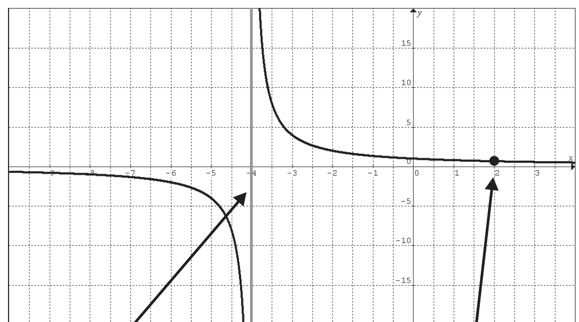
$$x=-4$$

Por lo que concluimos que la función $y=\dfrac{4x+8}{x^2+6x+8}$ presenta una asíntota vertical en x = –4; comparando nuestro resultado con su gráfica, verificamos:



La gráfica se corta en x = –4

Salto en x = 2



Asíntota cuya ecuación es x = –4

Salto en x = 2, no hay asíntota

En la gráfica de la izquierda observamos tanto el corte como el salto, y en la de la derecha se grafica la recta cuya ecuación es x = –4 y podemos observar la asíntota y también vemos el salto en x = 2

Ejercicio

Dadas las siguientes funciones, determinar sus asíntotas horizontales, grafícalas y menciona si son reales o imaginarias; traza las asíntotas en color verde sobre la gráfica de la función:

1. $y=\dfrac{3}{x+4}$
2. $f(x)=\dfrac{5x}{8x-3}$
3. $y=\dfrac{3x}{x^2+5x}$
4. $f(x)=\dfrac{x}{5x+30}$
5. $y=\dfrac{x^2-7}{x^2+4}$
6. $f(x)=\dfrac{6x+3}{x^2-x-12}$
7. $y=\dfrac{5x+40}{3x^2+2x-21}$
8. $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3-4x}$
9. $y=\dfrac{x^2+9x+20}{x^3+2x^2-15x}$
10. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^3+3x^2+2x}$
11. $y=\dfrac{x-4}{x^3-5x^2-2x+24}$
12. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3-2x^2-9x+18}$

Asíntotas horizontales

Cuando una función racional presenta una asíntota horizontal, la gráfica parece que guiará su "crecimiento" sobre ella. Para localizar la asíntota horizontal, tenemos que identificar la variable con mayor exponente tanto en el numerador como en el denominador, si:

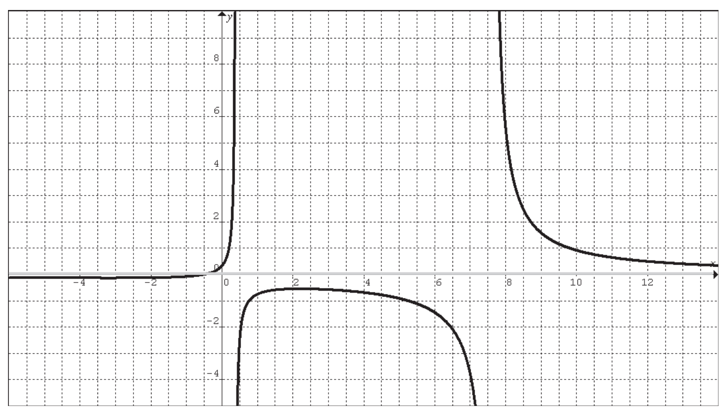
a) el exponente mayor aparece en el denominador (el grado del denominador es mayor que el del numerador) la función toma como asíntota al eje de las "x", es decir, se forma con la ecuación $y = 0$

b) el exponente mayor aparece en el numerador y el denominador (el grado del denominador es igual que el del numerador), la asíntota horizontal toma como ecuación $y = \frac{a}{b}$, donde a es el coeficiente principal del numerador y b es el coeficiente principal del denominador.

c) el exponente aparece sólo en el numerador (el grado del numerador es mayor que el del denominador), la función NO tiene asíntota horizontal.

Ejemplo

Determinar la asíntota horizontal de la siguiente función $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-8x+3}$; comprobar con su gráfica.



Análisis:
El grado del numerador es 1 y el grado del denominador es 2, por lo que el grado del denominador es mayor y la función toma como asíntota al eje x; es decir, la ecuación de la asíntota es $y = 0$

Es claramente visible cómo la gráfica de la función toma como asíntota horizontal a la recta $y = 0$

En conclusión, la función $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-8x+3}$ tiene una asíntota horizontal en $Y = 0$

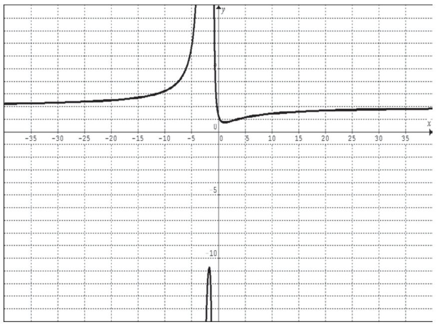
Ejemplo

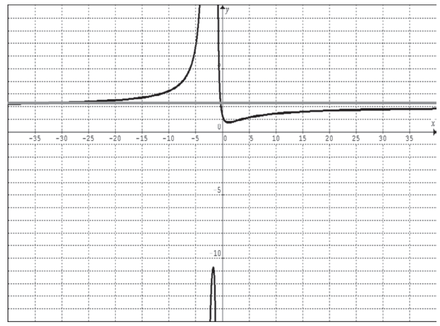
Determinar la asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{4x^2+8}{2x^2+8x+6}$; comprobar con su gráfica.

Análisis:
Podemos observar que el grado del numerador es el mismo que el del denominador, por lo que su asíntota es el cociente de sus coeficientes principales. En este caso, el coeficiente del numerador es 4 y el del denominador es 2, entonces su asíntota está formada por la recta cuya ecuación es:

$$y=\frac{4}{2}=2$$

Veamos su gráfica:





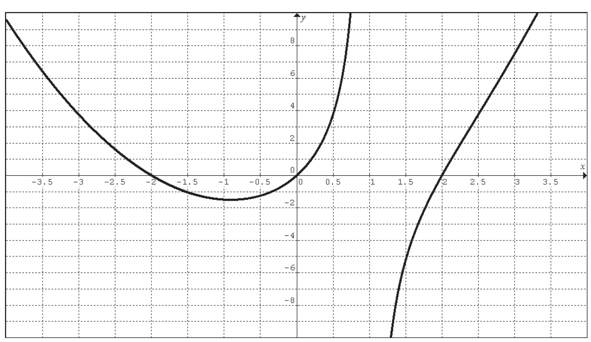
A la izquierda tenemos la gráfica de la función y a la derecha trazamos la recta y = 2 para poder hacer visible la asíntota horizontal.

En conclusión, la función $f(x)=\dfrac{4x^2+8}{2x^2+8x+6}$ tiene una asíntota horizontal en y = 2

Ejemplo

Determinar la asíntota horizontal de la función $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x-1}$; comprobar con su gráfica.

Análisis:
El grado del numerador es mayor que el del denominador, por lo que decimos que la función no tiene asíntota horizontal. Veamos su gráfica:



Podemos concluir que la función $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x-1}$ no tiene asíntota horizontal.

Ejercicio

Determinar la asíntota horizontal en cada función, si es que la tiene, y comprueba graficando.

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$

2. $y=\dfrac{1}{x^3}$

3. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$

4. $y=\dfrac{5x^2-17x-12}{2x^2-x-1}$

5. $f(x)=\dfrac{7x^3}{x^3-1x}$

6. $y=\dfrac{16x+3}{2x-7}$

7. $f(x)=\dfrac{x^3-3}{x^2+2x}$

8. $y=\dfrac{x^2-7x}{x^3-1}$

9. $f(x)=\dfrac{6x-11}{x-2}$

10. $y=\dfrac{3x^3+18x^2+33x+18}{x^3-6x^2+11x-6}$

Asíntotas oblicuas

Una función tendrá una asíntota oblicua cuando el grado del numerador sea una unidad más grande que el grado del denominador y tomará como ecuación al cociente de ambos. Tendrá como ecuación la forma ordinaria de la recta $y = mx + b$, es decir:

La forma general de la función racional es $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, entonces la ecuación de la asíntota oblicua se obtiene: $\dfrac{p(x)}{q(x)}=mx+b$

Ejemplo

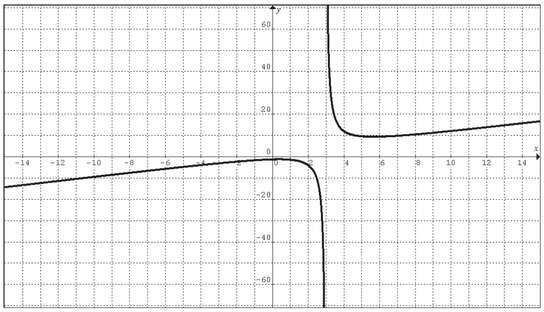
Determina la ecuación de la asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-3}$, si es que la tiene, comprobar con su gráfica:

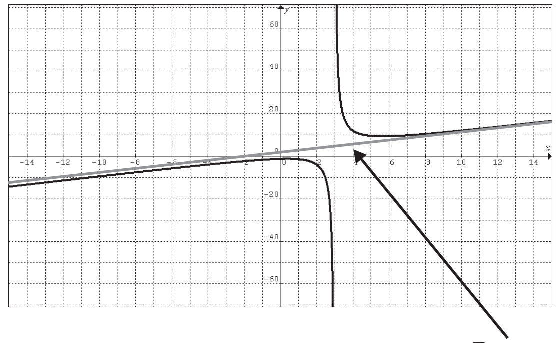
Análisis:
Como el grado del numerador es una unidad más grande que el grado del denominador, entonces sabemos que la función tiene una asíntota oblicua; ahora determinamos su ecuación utilizando la división sintética.

Podemos resumir que la ecuación de la asíntota es:

$$\begin{array}{r|lll}
 & x & +1 & \\ \hline
x-3 & x^2 & -2x & +4 \\
 & \underline{-x^2} & \underline{+3x} & \\
 & 0 & x & +4 \\
 & & -x & +3 \\
 & & 0 & 7
\end{array}$$

La recta de la asíntota de la función es $y = x + 1$





Recta
$y = x + 1$

Vemos en la gráfica de la izquierda que la función tiene una asíntota oblicua y al graficar la recta $y = x + 1$ se posiciona como su asíntota oblicua.

En conclusión la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 3}$, tiene como asíntota oblicua a la recta $y = x + 1$

Ejercicio

Determinar la asíntota oblicua de cada función, si la tiene, y comprueba con su gráfica.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
2. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 4}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 6}$
4. $y = \dfrac{x^2 - 8}{x + 3}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{3x^2 - 12}$
6. $y = \dfrac{x + 7}{x^2 - 2}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 16x}{x^2 - 4}$
8. $y = \dfrac{x^3 + 7x}{x^2 - 11}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x}$
10. $y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{x^2 + 2}$

Es importante destacar que cuando el exponente del numerador es dos unidades o más grande que el del denominador, la función parecerá que se acerca a otro elemento que no es una recta. Te retamos a verificar esto y a descubrir a qué elementos nos referimos.

Intersecciones con los ejes

Algunas funciones racionales presentan intersecciones con el eje "x" y con el eje "y"; para conocer éstas se deben seguir unas simples reglas.

Intersecciones con el eje "x" o ceros de la función racional

Las intersecciones las determinamos buscando en los factores del numerador, y la única restricción es que aquellos factores que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, es decir aquellos que provocan un salto, no nos proporcionarán ceros de la función.

Ejemplo

Determinar las intersecciones de la función $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-5x}$ con el eje x.

Primero factorizamos tanto el numerador como el denominador:

$$f(x)=\frac{x+4}{x^2-5x}=\frac{x+4}{x(x-5)}$$

Observamos que ninguno de los factores del numerador se repite en el denominador, por lo tanto la intersección con el eje "x" está contenida en el factor $x+4$.

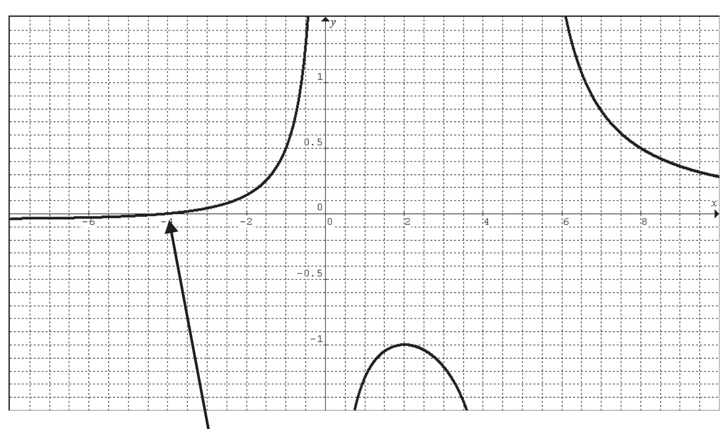
Segundo, igualamos con cero el factor o los factores del numerador que no se repiten en el denominador.

En este caso sólo es:

$$\begin{aligned} x+4&=0\\ x&=-4 \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir, la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-5x}$ intercepta al eje "x" en $x=-4$

Ahora trazamos su gráfica:



Podemos concluir que la función $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-5x}$ intercepta al eje "x" en $x = -4$

Ejemplo

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2-6x+8}$, determinar las intercepciones con el eje "x" si es que existen; comprueba con su gráfica.

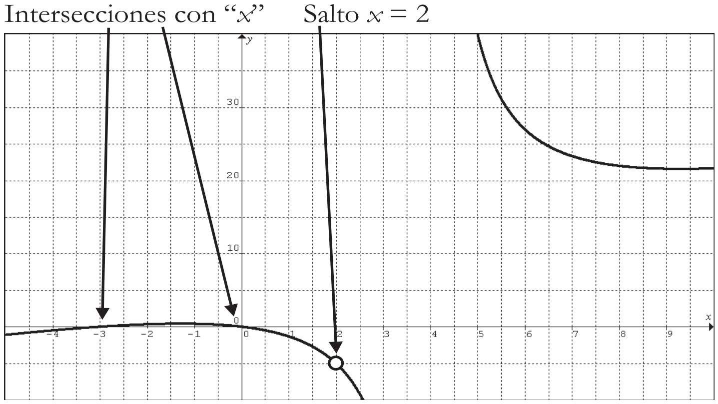
Factorizamos tanto el numerador como el denominador:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-6x+8}=\frac{x(x-2)(x+3)}{(x-4)(x-2)}$$

Al analizar los factores vemos que se repite el factor $x-2$, ya que en éste se produce un salto y por lo tanto, no se va a propiciar una intercepción con "x", mientras que los factores $x(x + 3)$; si igualamos y resolvemos tenemos:

$$\begin{aligned} x&=0\\ x+3&=0\\ x&=-3\\ x&=0 \end{aligned}$$

Así que concluimos: la función intercepta al eje "x" en $x = -3$ y $x = 0$. Verificamos con su gráfica.



Intersecciones con el eje y

Para hallar las intercepciones con el eje "y", simplemente se sustituye en la función el valor de $x = 0$ y se obtiene el valor de la intersección con y. Cada función puede tener como máximo sólo una intercepción con "y".

Ejemplo

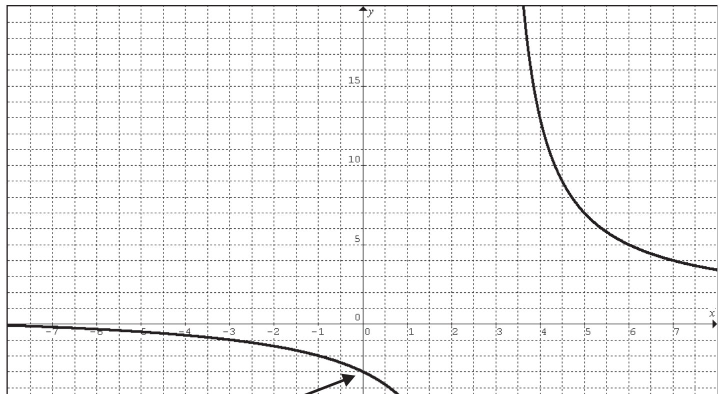
Dada la función $f(x)=\dfrac{x+9}{x-3}$, hallar su intercepción con el eje "y" y comprueba con su gráfica.

Hallamos $f(0)$:

$$f(0)=\frac{0+9}{0-3}=\frac{9}{-3}=-3$$

Por lo tanto, la función $f(x)=\dfrac{x+9}{x-3}$ intercepta al eje "y" en $y = -3$

Veamos su gráfica.



Intersección con el eje "y" en $y = -3$

Ejercicio

Dadas las siguientes funciones, determina las intercepciones con el eje "y" y comprueba con su gráfica:

1. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-5}$
2. $y=\dfrac{x}{x+4}$
3. $f(x)=\dfrac{2x-7}{x+4}$
4. $y=\dfrac{1}{x}$
5. $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{4x+8}$
6. $y=\dfrac{x^2-6}{x^2+2x+8}$
7. $f(x)=\dfrac{x^3-16x+3}{x+4}$
8. $y=\dfrac{3x^3-2x^2+3x-1}{x^2+1}$

Actividad

Todos estos conocimientos, como son la obtención del dominio, la localización de las asíntotas y las intercepciones con los ejes, te permitirán construir con cierta facilidad la gráfica de la función racional, a partir de su expresión algebraica. Te invitamos que demuestres lo aprendido a lo largo de este curso de Matemáticas IV y te aventures a trazar la gráfica de la función; desarrolla en equipo una estrategia que te permita construir la gráfica con la información que obtienes de la función misma.

Muestra tu estrategia al grupo y construyan entre todos una estrategia común; luego redáctenla y practiquen graficar distintas funciones para verificar su efectividad.

3.1.3 Variación inversa

La mayoría de los problemas de aplicación en la vida diaria son aquellos en que dos variables se comportan en forma proporcional; es decir, si una aumenta la otra también. Sin embargo, existen problemas como el planteado al inicio de la unidad en los que este comportamiento no se presenta en todo momento. Por ejemplo, cuando preguntamos: si quisiéramos que cada equipo terminara en la mitad del tiempo, ¿cuántos integrantes más tendremos que agregar a cada equipo? Inmediatamente, observamos que entre más integrantes tenga cada equipo, menos tiempo utilizarán para realizar su tarea; pues bien, a este comportamiento le llamamos variación inversa y se presenta de forma proporcional, ya que con cada integrante que aumentemos, el tiempo de trabajo disminuirá en forma proporcional al trabajo contribuido por él.

Este tipo de comportamiento no sólo se presenta en situaciones como la señalada, sino también en las diversas ciencias que se apoyan de las matemáticas; por ejemplo, en la física y la química.

La variación inversa como caso particular de la función racional

La variación inversa puede ser representada por una función cuya forma general es:

$$y = \frac{k}{x}, \text{ donde } x \neq 0$$

Esta ecuación la podemos reescribir como:

$$xy = k, \text{ donde } k \neq 0$$

Lo anterior nos indica que el producto de estas variables nos va a dar siempre una constante. Sin embargo, esto no significa olvidar que hablamos de una función, de tal manera que cada vez que x adopte un valor y tomará otro, por lo que cada vez que multipliquemos estos valores, el resultado siempre será el valor de k, a la cual llamamos constante de variación. Ejemplos de esta función son: $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{7}{x}$, $y = \frac{9}{x}$

Podemos comprobar lo anterior a partir de la tabulación; supongamos la función

$$y = \frac{8}{x}$$

Al hacer la tabla, tenemos:

x	y
1	8
2	4
3	8/3
4	2

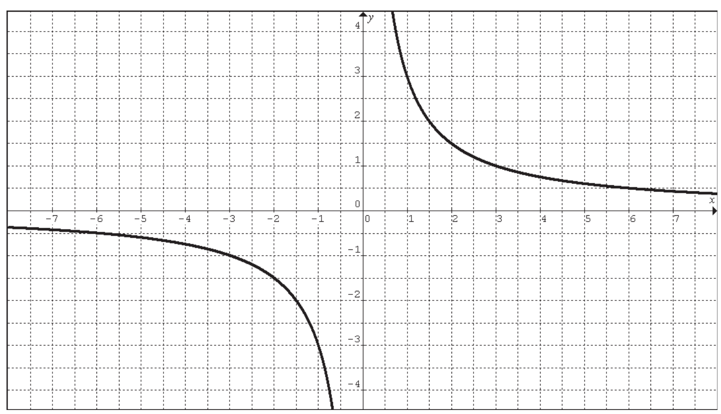
Ahora realicemos su producto y comprobemos:

$$xy = 8$$
$$(1)(8) = 8$$
$$(2)(4) = 8$$
$$(3)(8/3) = 8$$
$$(4)(2) = 8$$

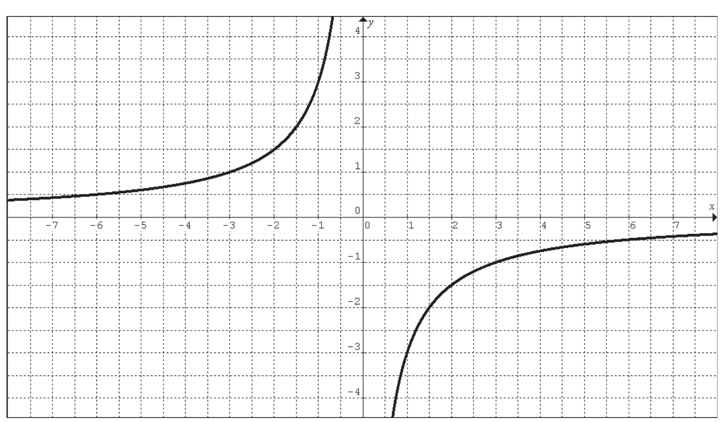
Como podemos ver, cada vez que multiplicamos los valores de "x" y "y" obtenemos el valor de k = 8. Entonces podemos concluir que k es una cantidad numérica que nos permite relacionar ambas variables.

El valor k se comporta como el coeficiente principal de la función, de tal manera que si éste es positivo, la gráfica será una hipérbola ubicada tanto en el cuadrante 3 como en el cuadrante 1; si k es negativa, su gráfica estará ubicada en los cuadrantes 2 y 4. Observa las siguientes gráficas:

$$y = \frac{3}{x}$$



$$y = \frac{-3}{x}$$



Actividad

Grafica las funciones $y = \frac{-5}{x}$, $y = \frac{-4}{x}$, $y = \frac{-2}{x}$, $y = \frac{-1}{x}$ en un mismo plano, y en otro plano grafica $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{5}{x}$. Menciona cuáles son las diferencias entre éstas; es decir, observa las regularidades que se presentan y aquellas diferencias que las identifican como funciones únicas.

Aplicaciones de la función inversa

Una aplicación de la variación inversa la encontramos en la Ley de la gravitación universal de Newton.

Ejemplo

Determinar la fuerza ejercida entre sí por dos masas de 1 kg, si están separadas por una distancia de:

a) 0.10 m
b) 0.25 m
c) 0.5 m
d) 1 m
e) 2 m

En tu curso de Física, la ecuación representativa de esta ley la estudiaste como:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde:

G = constante de gravitación universal
m_1 y m_2 = las masas de ambos cuerpos respectivamente
r = separación entre los cuerpos
F = fuerza gravitacional

Pero según nuestro problema, las masas son de 1 kg por lo que no cambia y. Podemos decir que $k = Gm_1m_2 = 6.67\text{x}10^{-11}(1)(1) = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2$ y nuestra ecuación se ve modificada para este problema como:

$$F = \frac{k}{r^2} = \frac{6.67\times10^{-11}}{r^2}$$

r	F
0.1	6.67×10^{-9}
0.25	1.0672×10^{-9}
0.5	2.668×10^{-10}
1	6.67×10^{-11}
2	1.6675×10^{-11}

Puedes observar los efectos de la variación inversa: entre más lejos están una de la otra, menor será la fuerza gravitacional entre éstas.

Ejemplo

Un automovilista recorre 6,000 m para ir a su trabajo. Si el lunes tarda 900 s y el martes 1200 s, determina qué rapidez tendrá en ambos casos y comprueba que se trata de una variación inversa.

Primero utilizamos la ecuación $v = \frac{d}{t}$. Como todos los días recorre la misma distancia, ésta se ve modificada a: $v = \frac{6000}{t}$; entonces:

$$v = \frac{6000}{900} = 6.67 m/s$$

$$v = \frac{6000}{1200} = 5 m/s$$

Observamos que si el tiempo aumenta, la rapidez disminuye; por lo tanto, se trata de una variación inversa.

Otras aplicaciones de la variación inversa las encontramos en la Ley de Ohm, las Leyes de los Gases, la Segunda Ley de Newton, la presión, el gasto de un fluido, el flujo, etc.

Ejercicio

1. Para restaurar una casa 12 hombres se tardan 18 días. ¿Cuántos hombres más se deben contratar para que dicha restauración esté lista en las 2/3 partes de ese tiempo?

2. 15 hombres se tardan 8 horas en hacer 5 mesas. ¿Cuánto tiempo se tardará un solo hombre en hacer las 5 mesas?

3. La ecuación de la presión es: $P = \frac{F}{A}$, donde la fuerza está en Newtons, el área en m^2 y la presión en Pascales (*Pa*).

Si ejercemos sobre un área de $1m^2$ una fuerza de 20 N la presión es de 20 Pa. ¿Qué pasará con la presión si aplicamos la misma fuerza, pero ahora sobre un área de:

a) $0.5\ m^2$
b) $2\ m^2$
c) $0.3\ m^2$

Contesta las siguientes preguntas:

1. Para que la presión sea mayor, ¿cómo debe ser el área?

2. ¿Qué pasa si aplico la fuerza sobre un punto, es decir que no haya área?

3. La Ley de Ohm se expresa con la siguiente ecuación: $I = \frac{V}{R}$, donde I = intensidad de la corriente en amperes, V es la diferencia de potencial en volts y R es la resistencia del circuito en ohms. Si V = 120 volts y deseamos que la intensidad de la corriente sea lo más pequeña posible, ¿cuál resistencia conviene utilizar, una de 40 ohms o una de 240 ohms? Fundamenta tu respuesta.

Auto evaluación

NOMBRE DEL ALUMNO: ______________________________ ACIERTOS ______

I. Instrucción: Encuentra en la siguiente sopa de letras aquellas palabras referentes a las características de la gráfica de las funciones racionales. Una vez que hayas encontrado todas, enlístalas en la parte de abajo y explica cómo puedes calcularlas.

I	N	T	E	R	C	E	P	C	I	O	N	C	O	N	Y	U	T
N	U	A	V	B	A	S	I	R	C	O	M	E	T	T	I	A	Z
T	P	Z	S	H	I	J	P	Y	F	H	R	U	D	M	S	E	X
E	S	P	I	I	R	T	F	U	S	C	A	B	T	I	E	D	O
R	C	L	O	I	N	E	B	V	E	Ñ	A	M	N	G	F	D	A
C	V	R	T	A	U	T	C	M	O	P	E	T	C	H	O	L	A
E	I	O	I	N	I	M	O	D	T	S	O	O	B	N	A	W	Q
P	E	T	I	R	O	W	A	T	A	T	M	O	S	W	E	S	T
C	F	P	J	R	W	C	T	Q	A	N	B	K	H	J	L	B	N
I	L	O	L	I	P	O	P	O	E	V	E	N	T	I	H	S	U
O	E	I	V	F	W	Q	B	N	O	I	E	B	K	J	A	B	A
N	E	D	I	C	T	L	O	S	O	H	U	R	A	L	A	N	S
C	B	A	I	E	I	O	N	L	K	J	B	V	T	T	R	C	A
O	D	T	B	C	A	R	K	H	F	J	I	O	T	I	E	G	T
N	W	V	U	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	C	O	T
X	S	A	E	A	E	I	O	U	B	A	V	E	B	I	N	A	P
A	S	I	N	T	O	T	A	H	O	R	I	Z	O	N	T	A	L

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

4. ______________________________

5. ______________________________

6. ______________________________

7. ______________________________

8. Dada la siguiente función, determina cada una de las características encontradas en la sopa de letras y realiza un trazo de su gráfica.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$$

II. Contesta brevemente lo que se te pide

1. Es el número máximo de asíntotas horizontales que puede tener una función racional.

____

2. Es el número máximo de intercepciones con el eje "y" que puede tener una función racional.

____

3. Si una función racional tiene asíntota horizontal, entonces sabemos que no tiene:

____

4. Es el número máximo de intercepciones que puede tener una función racional con el eje x.

____

III. Traza con rojo la asíntota horizontal, con verde la asíntota vertical y con café la asíntota oblicua, cuando las haya. Encierra con azul las intercepciones con el eje x, con morado la intercepción con y.