Teorema fundamental del cálculo y las aplicaciones de la integral definida

UNIDAD III

OBJETIVO

El estudiante:

- Aplicará el teorema fundamental del cálculo, mediante la resolución de problemas de áreas, áreas entre dos gráficas en situaciones de aplicación de las ciencias naturales y sociales; a partir del conocimiento de las propiedades de la integral definida; mostrando una actitud analítica, reflexiva y colaborativa.

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad determinamos el área bajo la curva de una función mediante las reglas trapecial y de Simpson, derivado de esto, resaltamos la importancia de la integral definida en el cálculo de dichas áreas a través de la aplicación del teorema fundamental del cálculo. Además, con éste calculamos la longitud de arco, el área de la superficie de un sólido y el volumen del mismo y mostramos sus aplicaciones en los diferentes campos, como son: naturales, sociales, económicos, administrativos, etcétera.

Evaluación diagnóstica

Nombre del alumno: ____

Grupo: ____________ Número de lista: ____________ Aciertos: ______________

Efectúa en tu cuaderno los siguientes ejercicios y subraya la opción que muestra el resultado correcto:

1. El valor de $\int_1^8 x\sqrt{1+3x}\, dx =$

   a) 23 b) 36 c) 26 d) 13

2. El valor de 1 $\int_0^{2\pi} sen\,\frac{t}{2}\, dt =$

   a) 4 b) 6 c) π d) 0

3. ¿Qué expresión resulta de integrar $\int e^{2x} sen\, 3x\, dx$?

   a) $\frac{e^{2x}}{6}(sen\, 3x - \cos 3x) + c$

   b) $e^{2x}(2\text{sen}\, 3x - 2\cos 3x) + c$

   c) $2e^{2x}(3\text{sen}\, 3x - 3\cos 3x) + c$

   d) 1 $\frac{e^{2x}}{13}(2\text{sen}\, 3x - 3\cos 3x) + c$

4. ¿Qué expresión resulta de integrar $\int \cos^3 x\, dx$?

   a) $\frac{1}{3}\cos^2 x sen\, x + \frac{2}{3} sen\, x + c$

   b) $\cos^2 x\text{sen}\, x + sen\, x + c$

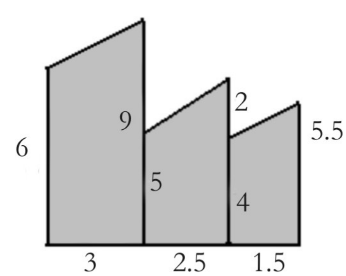
   c) $3\cos^2 x\text{sen}\, x + c$

   d) $\frac{2}{3}\cos^2 x\text{sen}\, x + \frac{1}{3} sen\, x + c$

4. ¿Cuál es el área de la figura?

   a) 48.535 b) 43.375

   c) 68.75 d) 38.75



3.1 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y SUS APLICACIONES

Seguramente, en alguna ocasión se ha presentado una persona contigo, te ha dicho su nombre y, después de una charla, no te acuerdas cómo se llama; o quizá has saludado a alguien en repetidas ocasiones, lo identificas fácilmente, pero no te acuerdas cómo se llama y cuando logras saberlo se te graba con facilidad.

Pues bien, si trasladamos este ejemplo al cálculo, específicamente al tema de integral definida, puedes recordar que, como vimos, la superficie limitada por: la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ puede determinarse por el límite de sumas de Riemann que se expresa como:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x_k$$

que a su vez define la integral definida, teniendo:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x_k$$

Sin embargo, para facilitar este cálculo recurriste a otra forma de evaluar la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Pues bien, esta forma que has visto, determinado, evaluado y aplicado se llama *Teorema fundamental del cálculo* y se enuncia de la siguiente forma:

Definición

Sea $f(x)$ una función integrable.

Supongamos que existe alguna función $F(x)$ continua tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Si utilizamos este teorema podemos determinar directamente el área bajo la curva de una función, donde la interpretación de su resultado queda sujeta a la naturaleza de las magnitudes que representan los ejes coordenados; estas aplicaciones se estudiarán más adelante.

Ahora se muestran dos reglas: regla trapecial y regla de Simpson**,** las cuales son útiles para determinar un valor aproximado de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

principalmente cuando la integración no puede efectuarse de forma inmediata.

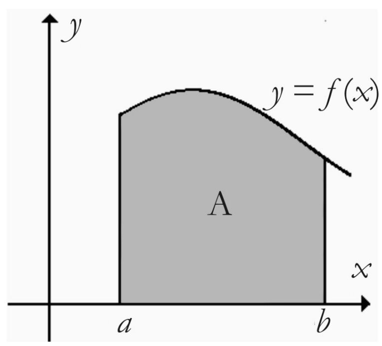
Integración aproximada: regla trapecial y regla de Simpson

Como vimos, el valor exacto de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es la medida de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Un valor aproximado de tal área se obtuvo sumando rectángulos, según las sumas de Riemann. De la misma forma, también puede encontrarse una aproximación de la misma área sumando trapecios (regla trapecial) y una aproximación aún mejor sumando áreas bajo arcos de parábolas (regla de Simpson).

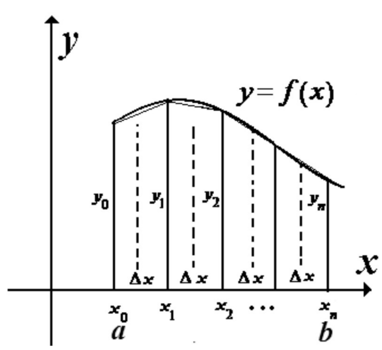
Veamos:

Valor aproximado del área bajo la curva sumando trapecios.

Observa la siguiente figura.



El área de la región sombreada **A** puede aproximarse sumando las áreas de n trapecios marcados sobre el intervalo, como se muestra a continuación.



A partir de esta figura, la regla de los trapecios para evaluar **A**, se especifica de la siguiente manera:

1. Se divide el intervalo [a, b] en n subintervalos iguales $[x_{k-1}, x_k]$ donde $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $x_0 = a$, $x_n = b$. Luego:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 ... < x_{n-1} < x_n = b$$

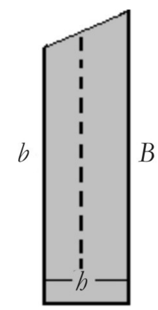
donde es la amplitud de cada subintervalo.

2. Para cada una de las abscisas obtenidas de esta división, se levanta su correspondiente ordenada según la curva. Sean éstas:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ ..., y_n = f(x_n)$$

3. Los trapecios se forman al unir las extremidades de estas ordenadas consecutivas con segmentos de recta (cuerdas).

4. Se suman los trapecios así obtenidos, considerando que el área de un trapecio se determina como:



$$A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{1}{2}(B+b)h$$

Así, las áreas de los trapecios (ver figura anterior) son:

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x = \text{área del primer trapecio.}$$

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x = \text{área del segundo trapecio.}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x = \text{área del enésimo trapecio.}$$

Y la suma de éstos es:

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + ... + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x =$$

$$\frac{1}{2}y_0\Delta x + \frac{1}{2}y_1\Delta x + \frac{1}{2}y_1\Delta x + \frac{1}{2}y_2\Delta x + \frac{1}{2}y_2\Delta x + ... + \frac{1}{2}y_{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}y_{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}y_n\Delta x =$$

$$\frac{1}{2}y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + ... + y_{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}y_n\Delta x$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente fórmula que permite encontrar una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ a partir del área bajo la curva sumando trapecios.

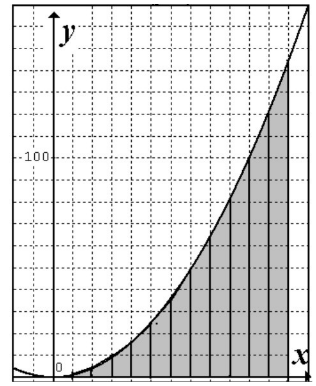
Fórmula de los trapecios:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo encontrar una aproximación de la integral definida por la fórmula de los trapecios.

Ejemplo

Hallar un valor aproximado de la integral definida que se indica aplicando la fórmula de los trapecios. Mostrar la gráfica con el área sombreada.



1. $\int_1^{12} x^2\,dx$ (tomando $n = 11$)

Solución

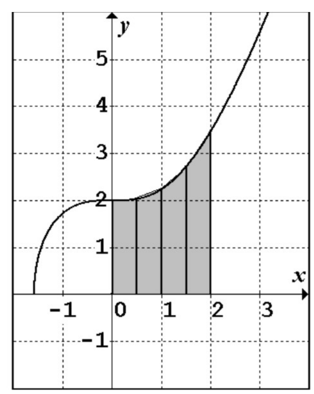
Tenemos $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{12-1}{11} = 1$

Además, el área en cuestión está bajo la curva $y = x^2$, entonces las abscisas y ordenadas a considerar son:

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_k	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Luego, por fórmula:

$$\int_1^{12} x^2\,dx \approx \left(\frac{1}{2}(1)+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121+\frac{1}{2}(144)\right)(1)$$
$$\approx 577.5$$



2. $\int_0^2 \sqrt{4+x^3}\,dx$ (tomando $n = 4$)

Solución

Tenemos $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

Además, el área en cuestión está bajo la curva $y = \sqrt{4+x^3}$, entonces las abscisas y ordenadas a considerar son:

x_k	0	0.5	1	1.5	2
y_k	2	2.031	2.236	2.716	3.464

Luego, por fórmula:

$$\int_0^2 \sqrt{4+x^3}\,dx \approx \left(\frac{1}{2}(2)+2.031+2.236+2.716+\frac{1}{2}(3.4.64)\right)(0.5)$$
$$\approx 4.858$$

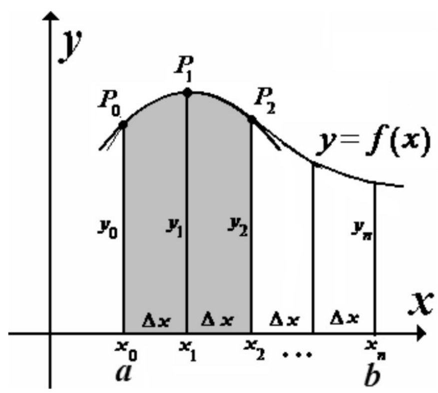
Ejercicio

Halla un valor aproximado de la integral definida que se indica aplicando la fórmula de los trapecios. Muestra la gráfica con el área sombreada.

1. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (tomando $n = 2$)
2. $\int_3^{10} \frac{dx}{x}$ (tomando $n = 7$)
3. $\int_0^5 x\sqrt{25+x^2}\,dx$ (tomando $n = 10$)
4. $\int_0^3 \sqrt{16+x^2}\,dx$ (tomando $n = 6$)
5. $\int_2^4 \frac{x^2}{\sqrt[3]{10+x^2}}\,dx$ (tomando $n = 4$)

Valor aproximado del área bajo la curva sumando áreas bajo arcos de parábolas (regla de Simpson).

El área bajo la curva $y = f(x)$ puede aproximarse sumando las áreas de n franjas limitadas por parábolas sobre un intervalo. La siguiente figura muestra una de estas franjas.



El procedimiento que se sigue para determinar una aproximación de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ con la regla de Simpson difiere respecto al que se sigue con la regla de los trapecios en la que, en lugar de unir las extremidades de las ordenadas sucesivas $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n)$ con segmentos de recta, éstas se unen, logrando una mayor aproximación, por arcos de parábolas como sigue:

1. Se divide el intervalo $[a, b]$ en un número par n de subintervalos iguales, siendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ la amplitud de cada subintervalo.

2. Para cada una de las abscisas obtenidas de esta división se levanta su correspondiente ordenada según la curva. Sean éstas:

$$y_0 = f(x_0),\quad y_1 = f(x_1),\quad y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

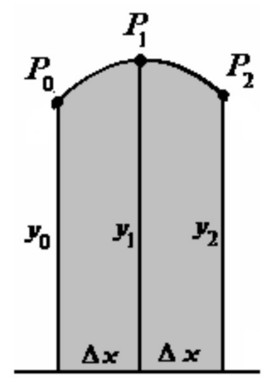
donde se distinguen los puntos:

$$P_0(x_0, y_0),\quad P_1(x_1, y_1),\quad P_2(x_2, y_2),\quad \ldots, P_n(x_n, y_n)$$

3. Por cada tres de estos puntos sucesivos P_0, P_1, P_2; P_2, P_3, P_4; P_4, P_5, P_6; etc. se trazan arcos de parábolas con ejes verticales, como se observa en la figura anterior.

4. Se suman las áreas de las franjas así obtenidas, dado que el área de cada una de ellas se obtiene como:

El área bajo una parábola de eje paralelo al eje de las y, que pasa por los puntos P_0, P_1, P_2 con ordenadas respectivas y_0, y_1, y_2 y distancia entre las abscisas de P_0 y P_2 igual a $2\Delta x$ como lo muestra la figura, es:



$$A = \frac{1}{3}\Delta x\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Así, la suma de las franjas limitadas por las parábolas (ver figura anterior) son:

$\frac{1}{3}\Delta x\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) =$ área de la primera franja limitada por una parábola,

$\frac{1}{3}\Delta x\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) =$ área de la segunda franja limitada por una parábola,

.
.
.

$\frac{1}{3}\Delta x\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) =$ área de la enésima franja limitada por una parábola

Y la suma de estas franjas es:

$$\frac{1}{3}\Delta x\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{1}{3}\Delta x\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \ldots + \frac{1}{3}\Delta x\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) =$$
$$\frac{1}{3}\Delta x\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Por tanto, tenemos la siguiente fórmula que permite encontrar una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$, a partir del área bajo la curva sumando franjas limitadas por parábolas.

Fórmula de Simpson:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\Delta x\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo encontrar una aproximación de la integral definida por la fórmula de Simpson.

Ejemplo

Hallar un valor aproximado de la integral definida que se indica aplicando la fórmula Simpson.

1. $\int_0^{10} x^3\,dx$ (tomando $n = 10$)

Solución

Tenemos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{10-0}{10} = 1$

Además, el área en cuestión está bajo la curva $y = x^3$, entonces las abscisas y ordenadas a considerar son:

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_k	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Luego, por fórmula:

$$\int_0^{10} x^3\,dx \approx \frac{1}{3}(1)\big(0+4(1)+2(8)+4(27)+2(64)+4(125)+2(216)+4(343)+2(512)+4(729)+1000\big)$$
$$\approx \frac{1}{3}(7500)$$
$$\approx 2500$$

2. $\int_0^{4} \dfrac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$ (tomando $n = 4$)

Solución

Tenemos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{10-0}{10} = 1$

Además, el área en cuestión está bajo la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^3}}$, entonces las abscisas y ordenadas a considerar son:

x_k	0	1	2	3	4
y_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{31}}$	$\frac{1}{2\sqrt{17}}$

Luego, por fórmula:

$$\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}} \approx \frac{1}{3}(1)\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{31}}+\frac{1}{2\sqrt{17}}\right)$$
$$\approx \frac{1}{3}(3.706)$$
$$\approx 1.235$$

Ejercicio

Halla un valor aproximado de la integral definida que se indica aplicando la fórmula de Simpson.

1. $\int_3^6 \frac{x}{4+x^2}dx$ (tomando $n = 6$)

2. $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{5+x^3}}dx$ (tomando $n = 4$)

3. $\int_0^4 x\sqrt{25-x^2}\,dx$ (tomando $n = 4$)

4. $\int_4^7 \sqrt{16+x^2}\,dx$ (tomando $n = 6$)

5. $\int_2^5 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}dx$ (tomando $n = 6$)

Área y área entre dos gráficas

Ya conoces varios procedimientos para evaluar aproximadamente la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

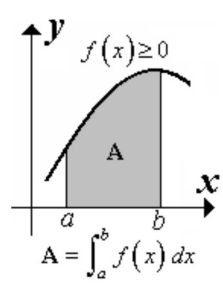
a partir de aproximar el área entre la curva $y = f(x)$, el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$, éstos son, por límite de sumas de Riemann, fórmula de trapecios y fórmula de Simpson. Así también, has aplicado el teorema fundamental del cálculo para evaluar integrales definidas, obteniendo con éste un resultado exacto. Sin embargo, aún no has determinado específicamente las áreas con tan importante teorema, aplicación que se ha reservado para abordarla en este momento.

Para hallar el área limitada por la curva de una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ aplicando el teorema fundamental del cálculo, debe considerarse si las funciones son: no negativas $(f(x) \geq 0)$, no positivas $(f(x) \leq 0)$, o bien, toman valores tanto positivos como negativos y cero. Además, cada vez que sea factible, debe representarse gráficamente el área correspondiente antes de aplicar el teorema fundamental del cálculo. Observa los ejemplos:

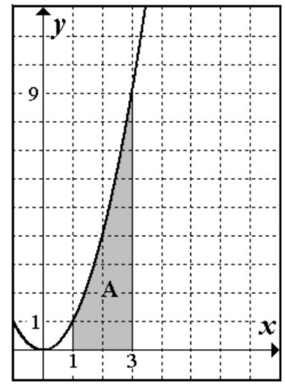
Ejemplo

Hallar las áreas que se indican aplicando el teorema fundamental del cálculo. Hacer previamente la representación gráfica.

En los ejemplos del 1 al 3, se tiene $f(x) \geq 0$, es decir, el área limitada por la curva está por encima del eje x.



1. Hallar el área limitada por la parábola de ecuación $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.



Solución
Representamos esta área por la integral definida correspondiente, la cual, para este caso es:

$$A = \int_1^3 x^2 dx$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$: (integración inmediata)

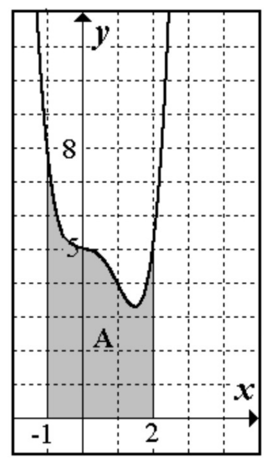
$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Luego, aplicamos el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida... listo, hemos encontrado el área deseada.

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{(3)^3}{3}\right] - \left[\frac{(1)^3}{3}\right]$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8.6u^2$$

2. Hallar el área limitada por la curva $y = x^4 - 2x^3 + 5$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.



Solución
Representamos el área por la integral definida correspondiente:

$$A = \int_{-1}^2 \left(x^4 - 2x^3 + 5\right) dx$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración inmediata):

$$F(x) = \int \left(x^4 - 2x^3 + 5\right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 5x$$

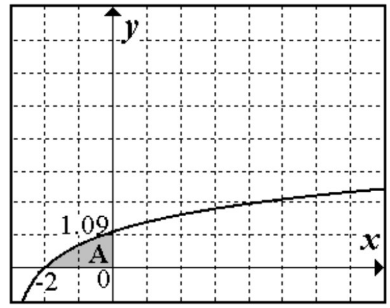
Ahora evaluamos la integral definida aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$A = \int_{-1}^2 \left(x^4 - 2x^3 + 5\right) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 5x\right]_{-1}^2$$

$$= \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^4}{2} + 5(2)\right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^4}{2} + 5(-1)\right]$$

$$= \frac{42}{5} + \frac{57}{10} = \frac{141}{10} = 14.1u^2$$

3. Hallar el área limitada por la curva $y = \ln(x + 3)$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 0$.



Solución
Representamos el área por la integral definida correspondiente, la cual, para este caso es:

$$A = \int_{-2}^{0} \ln(x+3)\,dx$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$, (integración por partes)

$$F(x) = \int \ln(x+3)\,dx = (x+3)\ln(x+3) - x$$

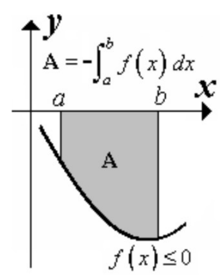
Ahora evaluamos la integral definida aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} \ln(x+3)\,dx = \left[(x+3)\ln(x+3) - x\right]_{-2}^{0} \\ &= \left[((0)+3)\ln((0)+3) - 0\right] - \left[((-2)+3)\ln((-2)+3)\right] \\ &= [3\ln 3] - [\ln 1 + 2] = 3\ln 3 - 2 = 1.296u^2 \end{aligned}$$

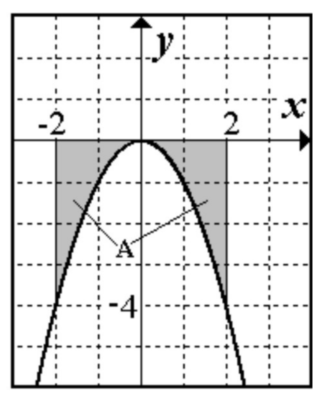
Evaluamos esta integral definida aplicando el teorema fundamental del cálculo, de esta manra hemos encontrado el área deseada.

$$A = \int_{2}^{3} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} = \left[\frac{(3)^3}{3}\right] - \left[\frac{(1)^3}{3}\right]$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8.\overline{6}\ u^2$$



En los ejemplos 4 y 5 se tiene $f(x) \leq 0$, es decir, el área limitada por la curva está por debajo del eje x.



4. Hallar el área limitada por la parábola de ecuación $y = -x^2$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución
Representamos el área por la integral definida correspondiente, la cual, para este caso es:

$$A = -\int_{-2}^{2} -x^2\,dx$$

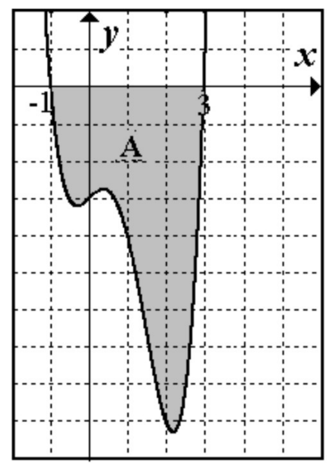
Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración inmediata):

$$F(x) = \int -x^2\, dx = -\frac{x^3}{3}$$

Luego, aplicamos el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida, así hemos encontrado el área deseada.

$$A = -\int_{-2}^{2} -x^2\, dx = -\left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = -\left\{\left[-\frac{(2)^3}{3}\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3}\right]\right\}$$
$$= -\left(-\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\right) = -\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3} = 5.\overline{3}\, u^2$$

5. Hallar el área limitada por la curva $y = x^4 - 3x^3 + x - 3$ y el eje x.



Solución
Representamos el área por la integral definida correspondiente:
Los límites de integración son las soluciones (ceros, raíces) de la ecuación $x^4 - 3x^3 + x - 3 = 0$, que son $x = -1$ y $x = 3$. Así,

$$A = -\int_{-1}^{3} \left(x^4 - 3x^3 + x - 3\right) dx$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración inmediata):

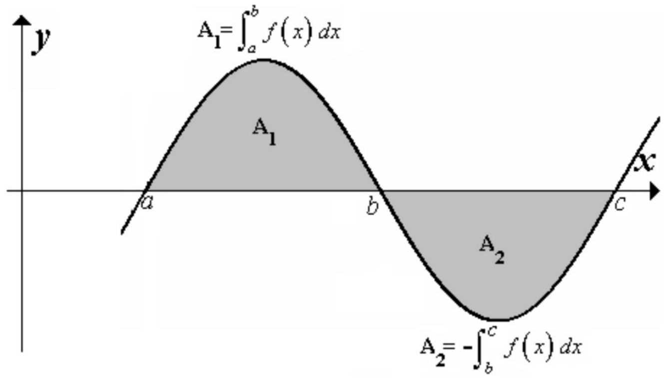
$$F(x) = \int \left(x^4 - 3x^3 + x - 3\right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 3x$$

Ahora evaluamos la integral definida aplicando el teorema fundamental del cálculo:

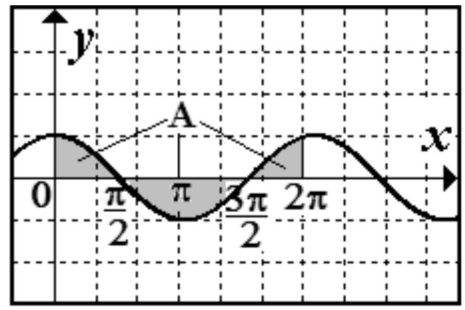
$$A = -\int_{-1}^{3} \left(x^4 - 3x^3 + x - 3\right) dx = -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-1}^{3}$$
$$= -\left\{\left[\frac{(3)^5}{5} - \frac{3(3)^4}{4} + \frac{(3)^2}{2} - 3(3)\right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{3(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} - 3(-1)\right]\right\}$$
$$= -\left\{-\frac{333}{20} - \frac{51}{20}\right\} = -\left\{-\frac{96}{5}\right\} = \frac{96}{5} = 19.2\, u^2$$

En los ejemplos 6 y 7, las funciones toman valores tanto positivos como negativos, es decir, el área limitada por la curva tiene regiones por encima y por debajo del eje x.

En este caso, es necesario calcular las áreas de cada una de las regiones y luego sumarlas.



6. Hallar el área limitada por la curva $y = \cos x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.



Solución

Representamos el área por la integral definida correspondiente, la cual, para este caso es:

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\, dx$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración inmediata):

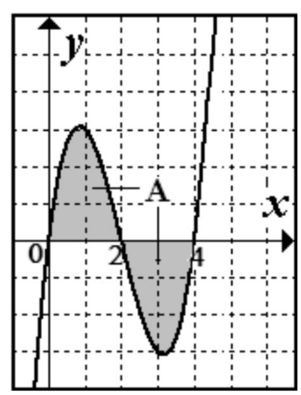
$$F(x) = \int \cos x\, dx = \text{sen } x$$

Como las dos regiones positivas son iguales en valor absoluto a la región negativa, bastará evaluar una región positiva y multiplicarla por cuatro, aplicando el teorema fundamental del cálculo.

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 4\left[\text{sen } x\right]_0^{\pi/2} = 4\left\{\left[\text{sen } \frac{\pi}{2}\right] - \left[\text{sen } 0\right]\right\}$$

$$= 4\{1-0\} = 4\ u^2$$

7. Hallar el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x.



Solución

Representamos el área por la integral definida correspondiente, la cual, para este caso es:

$$A = \int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx - \int_2^4 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$, (integración inmediata)

$$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$$

Como la región positiva es igual en valor absoluto a la región negativa, bastará evaluar la región positiva y multiplicarla por dos, aplicando el teorema fundamental del cálculo.

$$A = 2\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2$$

$$= 2\left\{\left[\frac{(2)^4}{4} - 2(2)^3 + 4(2)^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - 2(0)^3 + 4(0)^2\right]\right\}$$

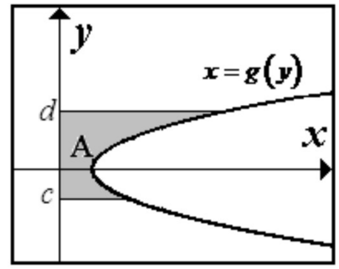
$$= 2(4) = 8\, u^2$$

Ejercicio

Representar las regiones del plano limitadas por las curvas dadas y hallar dichas áreas aplicando el teorema fundamental del cálculo.

1. $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 4$
2. $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$
3. $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$
4. $y = 4x$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 0$
5. $y = -x^2 + x + 2$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 2$
6. $y = \frac{1}{2} + \cos x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{4\pi}{3}$
7. $y = \ln(x + 5)$, el eje x y las rectas $x = -4$ y $x = 5$
8. $y = xe^x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$
9. $y = \tan x$, el eje x y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$
10. $y = \ln x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = e$
11. $y = \frac{3x-2}{x^2-4}$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = \frac{2}{3}$
12. $y = \frac{1}{8 - x^3}$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 0$

Hasta el momento conoces el procedimiento para hallar el área de una región limitada por la curva $y = f(x)$ por arriba y debajo del eje x.



Ahora, hallaremos el área de la región limitada por la curva $x = g(y)$, el eje y y las rectas $y = c$ y $y = d$ determinada a la derecha del eje y, aplicando nuevamente el teorema fundamental del cálculo. Dicha área será determinada de forma similar a lo antes visto, quedando expresada la integral definida para este caso como:

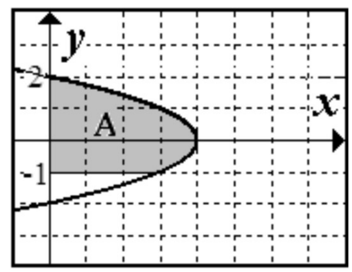
$$A = \int_c^d g(y)\, dy$$

Ejemplo

Hallar el área limitada por la parábola de ecuación $x = 4 - y^2$, el eje y y las rectas $y = -1$ y $y = 2$, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo. Hacer previamente la representación gráfica.

Solución

Representamos esta área por la integral definida correspondiente, la cual, para este caso es:



$$A = \int_{-1}^{2} \left(4 - y^2\right) dy$$

Encontramos una antiderivada $G(y)$ (integración inmediata):

$$G(y) = \int \left(4 - y^2\right) dy = 4y - \frac{y^3}{3}$$

Luego, aplicamos el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida. Nuevamente, así encontramos el área deseada.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[4(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] \\ &= \frac{16}{3} + \frac{11}{3} = \frac{27}{3} = 9\, u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio

Representar las regiones del plano limitadas por las curvas dadas y hallar dichas áreas aplicando el teorema fundamental del cálculo.

1. $x = 8 + 2y - y^2$, el eje y y las rectas $y = -1$ y $y = 3$

2. $x = 1 + y^2$, el eje y y las rectas $y = -3$ y $y = 3$

3. $x = y^3 + 1$, el eje y y las rectas $y = 0$ y $y = 2$

4. $x = 3 - y^2$, el eje y

5. $x = 6y^2 - y^4$, el eje y y las rectas $y = -2$ y $y = 2$

6. $x = \sqrt{y^2+4}$, el eje y y las rectas $y = -2$ y $y = 4$

Actividad

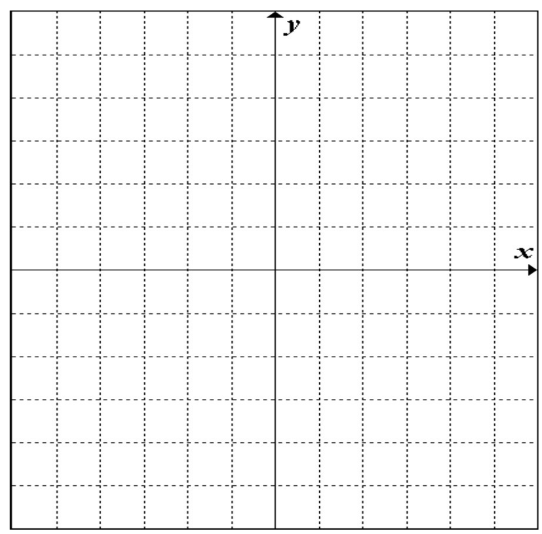
Área del círculo por integración.

En equipos de trabajo de cuatro integrantes realicen lo siguiente:

1. Grafiquen en el plano, el círculo cuya ecuación de su circunferencia es $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

2. Determinen una integral definida adecuada que los lleve a precisar el área de dicho círculo (elijan hallar primero la mitad o la cuarta parte del círculo y a partir de ello determinen el área total.

   Área del círculo hallada por integración: __________



3. También calculen el área del círculo mediante su fórmula geométrica (elijan la fórmula a partir del radio o diámetro).

   Área del círculo, hallada a partir de su fórmula geométrica: __________

4. Verifiquen que el resultado del paso 3 y 4 es el mismo.

5. Comenten en plenaria lo que aprendieron con esta actividad.

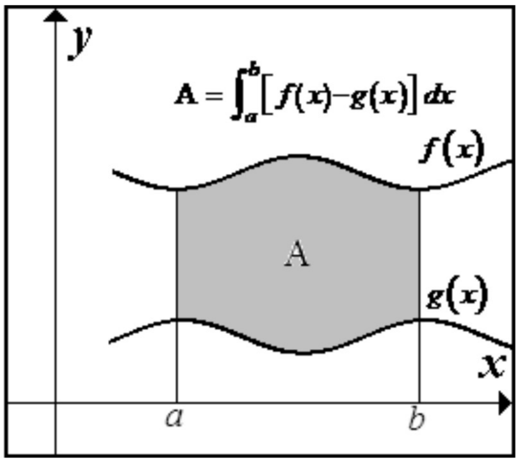
Otra área que determinaremos es la de una región limitada por las curvas de dos funciones, en dos posibles casos: cuando no se cortan las curvas, en donde la región se limita por las dos gráficas y las rectas, y cuando se cortan las curvas, en donde deben determinarse previamente las intersecciones de tales curvas. Primero graficaremos el área correspondiente y después aplicaremos el teorema fundamental del cálculo.

La integral definida correspondiente al área que se va a determinar se obtiene de la siguiente manera:

Si **A** es el área limitada por arriba por la gráfica de la función continua $f(x)$, por debajo por la función continua $g(x)$, donde $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$ y por las rectas $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la figura, entonces:

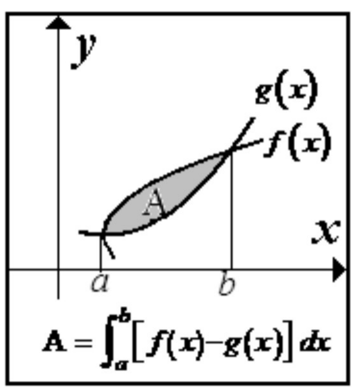
A = Área bajo $f(x)$ – Área bajo $g(x)$

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$



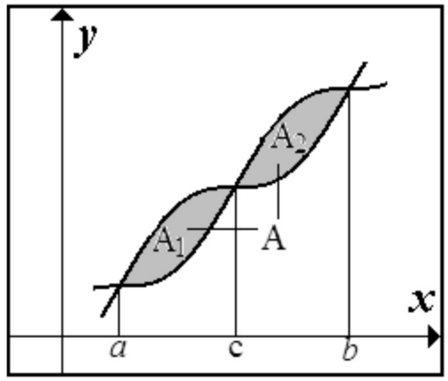
Si **A** es el área encerrada por dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ que se cortan en los extremos de $[a, b]$, como se muestra en la figura, deben determinarse previamente las intersecciones de tales curvas cuyas, abscisas son los límites de la integral definida que igualmente queda determinada por:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$



Si **A** es el área encerrada por dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ que se cortan en $[a, b]$, como se muestra en la figura, entonces se suman las áreas de los subintervalos determinados por las abscisas de los puntos de intersección.

$$A = \int_a^c \left[f(x) - g(x) \right] dx + \int_c^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

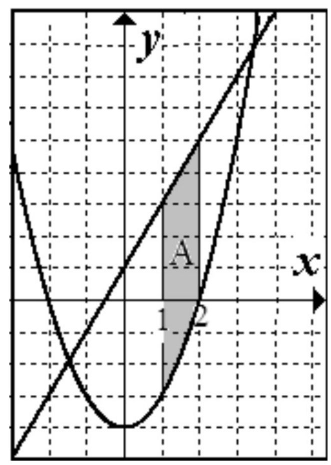


Observa los ejemplos:

Ejemplo

Hallar las áreas que se indican aplicando el teorema fundamental del cálculo. Hacer previamente la representación gráfica.

1. Hallar el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 4$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.



Solución
Representamos el área por la integral definida correspondiente, la cual, para este caso es:

$$A = \int_1^2 \left[(2x+1)-(x^2-4)\right] dx$$
$$= \int_1^2 (-x^2+2x+5)\, dx$$

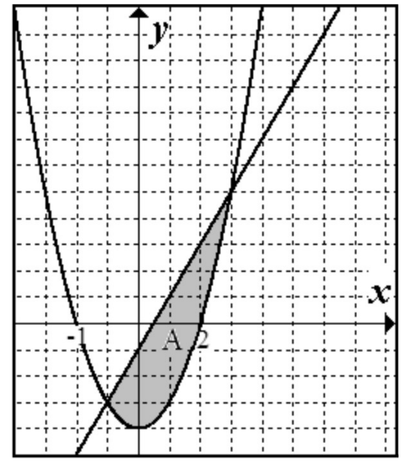
Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración inmediata):

$$F(x) = \int (-x^2+2x+5)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 5x$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la integral definida tenemos:

$$A = \int_1^2 (-x^2+2x+5)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 5x\right]_1^2$$
$$= \left\{\left[-\frac{(2)^3}{3} + (2)^2 + 5(2)\right] - \left[-\frac{(1)^3}{3} + (1)^2 + 5(1)\right]\right\}$$
$$= \frac{34}{3} - \frac{17}{3} = \frac{17}{3} = 5.66\, u^2$$

2. Hallar el área de la región encerrada por las gráficas $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 - 4$



Solución

Determinamos las intersecciones de las funciones:

Resolviendo el sistema:

$$2x - 1 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$

Tenemos:

$$x^2 - 4 = 2x - 1$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x+1)(x-3) = 0$$

De donde $x = -1$ y $x = 3$

Luego, el área representada por la integral definida es:

$$A = \int_{-1}^{3}\left[(2x-1)-(x^2-4)\right]dx$$
$$= \int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$$

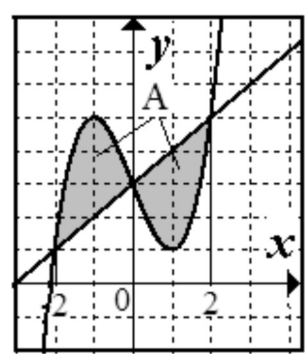
Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración inmediata):

$$F(x) = \int(-x^2+2x+3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la integral definida tenemos:

$$A = \int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_1^2$$
$$= \left\{\left[-\frac{(3)^3}{3}+(3)^2+3(3)\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+3(-1)\right]\right\}$$
$$= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3} = 10.66\,u^2$$

3. Encontrar el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones:



$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \text{ y } g(x) = x + 3$$

Solución

Determinamos las intersecciones de las funciones:

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 3 &= 0 \\ x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 3 &= x + 3 \\ x^3 - 4x &= 0 \\ x\left(x^2 - 4\right) &= 0 \end{aligned}$$

De donde $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$

Luego, el área representada por la integral definida es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0}\left[\left(x^3 - 3x + 3\right) - \left(x + 3\right)\right] dx + \int_{0}^{2}\left[\left(x^3 - 3x + 3\right) - \left(x + 3\right)\right] dx \\ &= \int_{-2}^{0}\left(x^3 - 4x\right) dx + \int_{0}^{2}\left(x^3 - 4x\right) dx \end{aligned}$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración inmediata):

$$F(x) = \int\left(x^3 - 4x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la integral definida tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0}\left(x^3 - 4x\right) dx + (-)\int_{0}^{2}\left(x^3 - 4x\right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} \\ &= \left\{\left[\frac{(0)^4}{4} - 2(0)^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right]\right\} - \left\{\left[\frac{(2)^4}{4} - 2(2)^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - 2(0)^2\right]\right\} \\ &= 4 + 4 = 8\ u^2 \end{aligned}$$

I. Representar las regiones del plano según se indica y hallar dichas áreas aplicando el teorema fundamental del cálculo.

1. Limitada por $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 1 - x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$

2. Limitada por $f(x) = -x^2$, $g(x) = 1$ y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

3. Limitada por $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 4$ y las rectas $x = -1$ y $x = 2$

4. Limitada por $f(x) = -x^2 + 3$, $g(x) = -x + 3$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$

5. Limitada por $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ y las rectas $x = -1$ y $x = 2$

6. Limitada por $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

7. Limitada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$

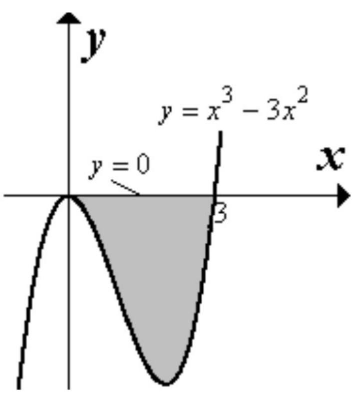
8. Encerrada entre $f(x) = -x^2 + 6x + 5y$ y $g(x) = x^2 + 5$

9. Encerrada entre $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$

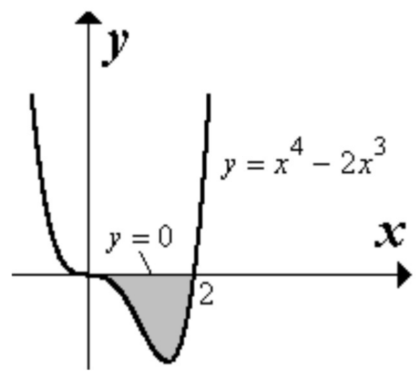
10. Encerrada entre $f(x) = x^4 - 4x^2$ y $g(x) = x^2$

II. Encuentra el área de la región sombreada.

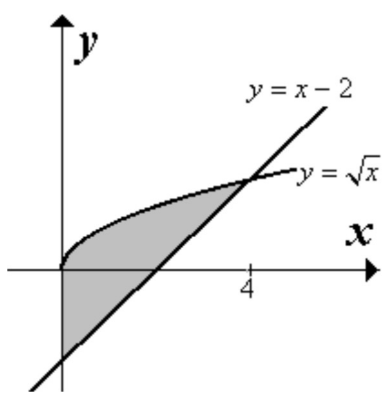
1.



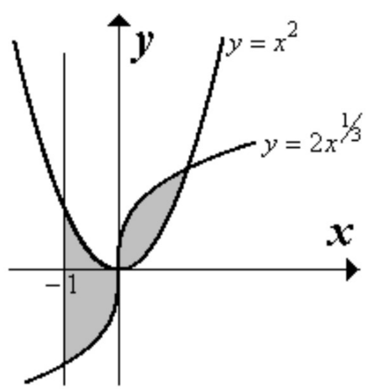
2.



3.

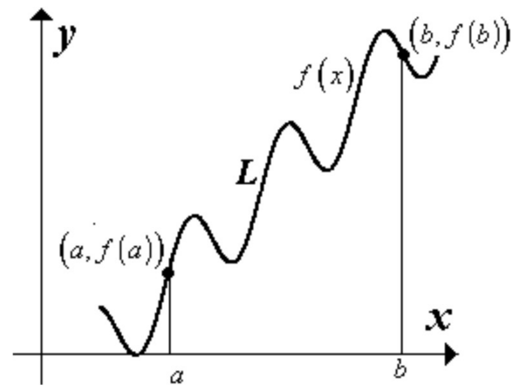


4.



3.2 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La aplicación esencial de la integral definida es encontrar el área de una región en el plano; de ésta se derivan otras aplicaciones más, como son: la longitud de arco, el volumen del sólido de revolución y el área de una superficie de revolución, mismas que estudiaremos a continuación.



Dada una función $f(x)$ derivable en $[a, b]$. La longitud L de la curva de $f(x)$ considerada desde $\left(a, f(a)\right)$ hasta la llamada *longitud de arco,* está dada por la fórmula:

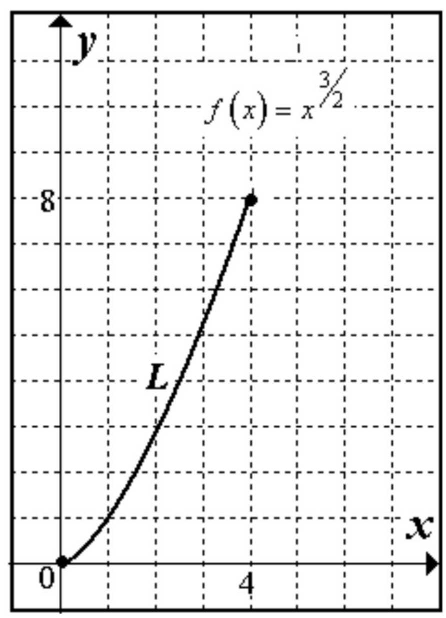
Fórmula de la longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Presta atención al ejemplo:

Ejemplo

Hallar la longitud de arco de la curva $f(x) = x^{3/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$. Hacer la representación gráfica.



Solución

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Aplicando la fórmula de longitud de arco, tenemos:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$$

Encontramos una antiderivada $F(x)$ (integración por sustitución):

$$F(x) = \frac{4}{9}\int\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}\cdot\frac{9}{4}dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}$$

$$= \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la integral definida:

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4$$

$$=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}(4)\right)^{3/2}\right]-\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}(0)\right)^{3/2}\right]$$

$$=\left[\frac{8}{27}(10)^{3/2}\right]-\left[\frac{8}{27}(1)^{3/2}\right]$$

$$=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)=\frac{8}{27}(30.62)=9.073\ u$$

Ejercicio

Halla la longitud del arco que se indica de las siguientes curvas y traza su gráfica correspondiente.

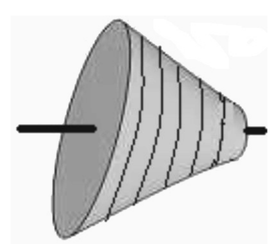
1. $f(x) = 2x^{2/3}$ desde $x = 0$ hasta $x = 8$
2. $f(x)=\dfrac{x^4+3}{2x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$
3. $f(x)=\sqrt{x-2}$ desde (2, 0) hasta (11, 3)
4. $f(x) = x^2 - \ln x$ desde (1, 1) hasta (3, 8)
5. $f(x) = 2\cos x + x$ desde $x = 1$ hasta $x = 2\pi$

¿Has visto cómo se hace un jarrón de barro usando el torno?

Pues bien, el torno empleado consiste de un eje vertical colocado a un plato horizontal, en el cual el alfarero pone la masa de arcilla y haciéndolo girar moldea la pieza deseada.

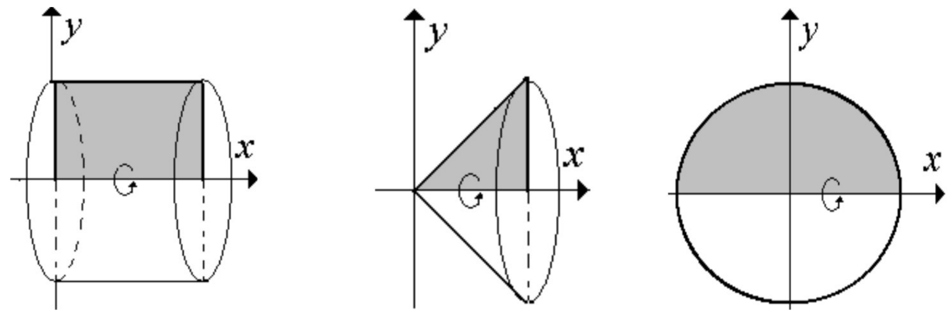
La fabricación de esta pieza de artesanía ejemplifica un sólido de revolución.

Veamos:



Un *sólido de revolución* se obtiene al girar una región plana alrededor de una recta que no se corta con la región, de modo que cada punto de ésta describe una circunferencia al dar una vuelta completa (aquí en lugar de usar rectángulos como en área consideramos discos de espesor h). La recta sobre la cual ocurre la rotación se denomina *eje de revolución*.

Los cilindros, conos y esferas son los cuerpos de revolución más conocidos, y las regiones generadoras de éstos son rectángulos, triángulos y semicírculos respectivamente.

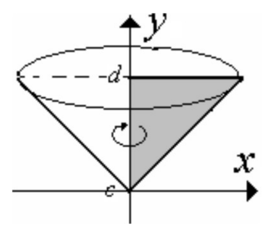


El volumen de estos cuerpos se ha determinado mediante procedimientos propios de la geometría plana. Ahora veremos una forma general de calcular éstos y otros cuerpos de revolución.

Si $f(x)$ es una función continua tal que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ y consideramos la región bajo la gráfica de f, por encima del eje x, y entre las rectas $x = a$ y $x = b$ la hacemos girar en torno del eje x se forma un sólido de revolución, cuyo volumen se determina por la fórmula:

Fórmula del disco para determinar el volumen del sólido de revolución:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx$$

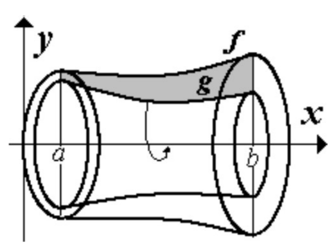


Si $g(y)$ es una función continua, se considera la región bajo la gráfica de g, a la derecha del eje y, y entre las rectas $y = c$ y $y = d$ se hace girar en torno del eje y, formándose un sólido de revolución cuyo volumen se determina en este otro caso por la fórmula:

Fórmula del disco para determinar el volumen del sólido de revolución:

$$V = \pi \int_c^d \left(g(y) \right)^2 dy$$

El cálculo del volumen de un sólido de revolución generado por las regiones limitadas de dos funciones se determina restando los sólidos de revolución generados por cada una de dichas regiones.

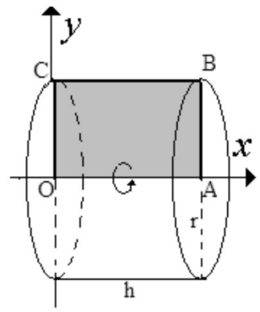


Actividad

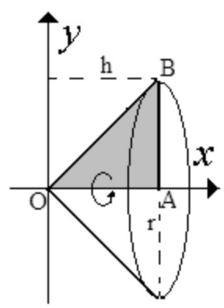
Fórmulas conocidas de volumen por integración.

En equipos de trabajo de cuatro integrantes determinen el volumen según se pide, aplicando la fórmula anterior.

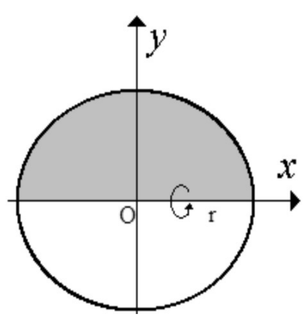
1. Hallen por integrales, la fórmula del volumen de un cilindro circular recto. Considerar que se genera por el rectángulo *OABC*, como se muestra en la figura:



2. Hallen por integrales, la fórmula del volumen de un cono recto. Se debe considerar que se genera por un triángulo rectángulo *OAB*, como se muestra en la figura:



3. Hallen por integrales, la fórmula del volumen de la esfera de radio *r*. Hay que considerar que se genera por un semicírculo, como se muestra en la figura:



4. Comparen sus soluciones en plenaria.

También puede hallarse la superficie S de revolución; es decir, la superficie externa del sólido de revolución dadas las funciones en términos de $x\left(f\left(x\right)\right)$ o en términos de $y\left(g\left(y\right)\right)$ mediante las fórmulas:

Fórmula de una superficie de revolución:

$$S = 2\pi\int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}\ dx$$

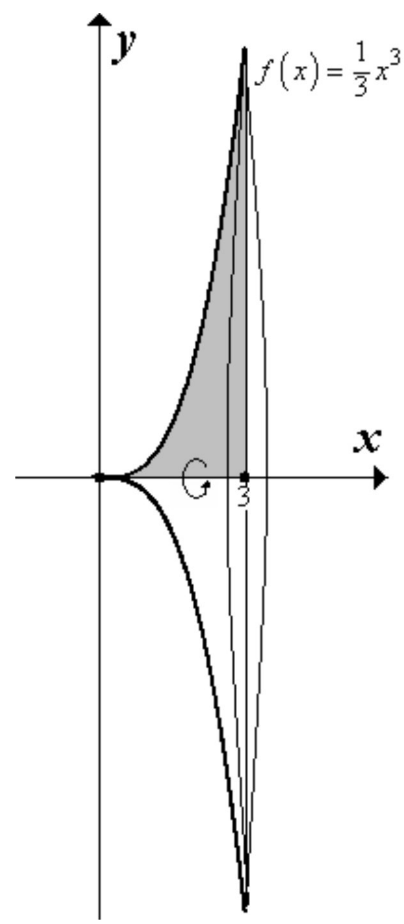
y

$$S = 2\pi\int_c^d g\left(y\right)\sqrt{1+\left(f'\left(y\right)\right)^2}\ dy$$

El siguiente ejemplo muestra cómo determinar volumen y área de un sólido de revolución.

Ejemplo

Hallar el volumen y área del sólido de revolución generado por la región limitada por la curva $y = f\left(x\right) = \frac{1}{3}x^3$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$ alrededor del eje x.



Solución
Para encontrar el volumen:

Determinamos la integral definida, la cual a partir de la fórmula se tiene,

$$V = \pi\int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2 dx = \frac{\pi}{9}\int_0^3 x^6\, dx$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$V = \frac{\pi}{9}\int_0^3 x^6 dx = \frac{\pi}{9}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^3 = \frac{\pi}{9}\left\{\left[\frac{(3)^7}{7}\right]-\left[\frac{(0)^7}{7}\right]\right\}$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(\frac{2187}{7}\right) = \frac{243\pi}{7} = 109.058\ u^3$$

Para hallar el área exterior del sólido:

Determinamos la integral definida, la cual con la fórmula y sabiendo que $f(x) = x^2$ se tiene:

$$S = 2\pi\int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx = 2\pi\int_0^3\frac{1}{3}x^3\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}dx$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^3 x^3\sqrt{1+x^4}dx$$

Integrando por sustitución:

$$\int x^3\sqrt{1+x^4}\,dx=\frac{\left(1+x^4\right)^{3/2}}{6}$$

Y aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$S=\frac{2}{3}\pi\int_0^3 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx=\frac{2}{3}\pi\left[\frac{\left(1+x^4\right)^{3/2}}{6}\right]_0^3=\frac{\pi}{9}\left[\left(1+x^4\right)^{3/2}\right]_0^3$$

$$=\frac{\pi}{9}\left\{\left(1+(3)^4\right)^{3/2}-\left(1+(0)^4\right)^{3/2}\right\}=\frac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82}-1\right)=258.846\ u$$

Ejercicio

I. Halla por integración el volumen del sólido de revolución generado haciendo girar alrededor del eje x la región limitada, según se indica. Construir la gráfica.

1. $y = x^3$, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$

2. $y = 6 - x$, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$

3. $y = \operatorname{sen} x$, el eje x, $x = 0$ y $x = \pi$

4. $y = \cos 2x$, el eje x, $x=\frac{\pi}{4}$ y $x=\frac{3\pi}{4}$

5. $y = e^{-x}$, el eje x, $x = 0$ y $x = 5$

II. Halla por integración el volumen del sólido de revolución generado haciendo girar alrededor del eje y la región limitada, según se indica. Construir la gráfica.

6. $y = x^3$, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$

7. $y=\sqrt{8x}$, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$

8. $y=\sqrt{4-x}$, el eje x, $x = 0$ y $x = 4$

9. $x=\sqrt{3-y}$, el eje y, $y = 0$ y $x = 3$

10. $y = e^x$, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$

11. Se perfora un hoyo de 1 cm de radio en una esfera sólida de 3 cm de radio, si el eje del hoyo es el diámetro de la esfera, hallar el volumen restante de la esfera.

12. El cono de la nariz de un cohete paraboloide obtenido mediante la rotación de la curva es $y = \sqrt{x}$ y el eje x, $x = 0$ y $x = 5$ alrededor del eje x. Calcula el volumen de la nariz del cohete.

III. Halla la longitud de arco de la curva que se indica.

13. $y = \ln\left(1 - x^3\right)$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{1}{2}$

14. $y = 4x - x^2$ por encima del eje x

15. $y =$ sen x desde $x = 0$ hasta $x = \pi$

16. Halla el área de la superficie que se genera cuando el arco de la parábola $y = x^2$ desde $x = 2$ hasta $x = 2$ gira alrededor del eje y.

17. Hallar el área lateral del cono truncado que se obtiene cuando el segmento de la recta $2y = x - 4$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$ gira alrededor del eje x.

Aplicaciones de la integral definida en situaciones propias de las ciencias naturales y sociales

Con los contenidos que se han estudiado puedes solucionar situaciones prácticas y científicas que requieran un cálculo a partir de la integral definida.

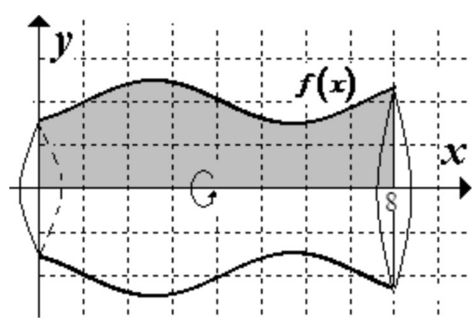
Actividad

¿Cuándo aplico la integral definida?

En equipos de trabajo de cuatro integrantes determinen la solución a los siguientes problemas.

1. Una pelota de futbol americano tiene 16 pulgadas de largo y una sección plana que contiene una costura; es una elipse cuyo diámetro menor es de 8 pulgadas. Hallar su volumen y la cantidad de cuero que forra su exterior.

2. Hallar la cantidad de material que se requiere para fabricar una figura sólida como se muestra en la figura, sabiendo que $f\left(x\right) = \frac{1}{3} sen\left(x - 1\right) + 2$. Si se pinta completamente, ¿cuánta pintura se necesitará?



3. Si la figura del problema anterior representa un jarrón, ¿cuál es su capacidad? Si el jarrón está fabricado de bronce, previa investigación del precio de este metal, calculen el costo de la cantidad de cobre empleado.

4. La velocidad de una partícula en movimiento es $V(t) = 2t^2 - 5t$ en m/s. Encuentra la función que describe su desplazamiento y la distancia recorrida en el intervalo de tiempo [1, 4].

5. Una cierta población animal crece a razón de $P'(t) = 200 + 50t$ al año (t está medida en años). ¿Cuánto crecerá la población entre el cuarto y el noveno años?

6. Investiguen previamente, de forma individual un problema resuelto en el cual se aplique la integral definida, conjúntenlos por equipo y analicen su solución. Formen con ellos un problemario grupal de manera que se entregue a cada alumno.

7. Elijan al azar un alumno que exponga la solución de alguno de estos problemas.

Auto
evaluación

I. Escribe en la línea lo que se pide.

1. El teorema fundamental del cálculo:

____

____

2. La fórmula para determinar la longitud de un arco en una curva dada:

____

____

3. La fórmula para determinar el volumen de un sólido de revolución:

____

____

4. La fórmula para determinar el área de un sólido de revolución:

____

____

5. La longitud del intervalo [1, 5]: ______________________________

6. La longitud de cada subintervalo resultante de dividir el intervalo [1, 5] en 5 partes iguales:

____

II. Efectúa en tu cuaderno los siguientes ejercicios y subraya la opción que muestra el resultado correcto. Elabora su correspondiente gráfica.

1. ¿Cuál es el área limitada por la hipérbola $y = \frac{9}{x}$, el eje de las x y las rectas $x = 3$ y $x = 6$?

a) $\ln 3\ u^2$ b) $\ln 6\ u^2$ c) $6 \ln 3\ u^2$ d) $9 \ln 2\ u^2$

2. ¿Cuál es la superficie limitada por las curvas $y^2 = 4x$ y $2x - y - 4 = 0$?

a) $9\ u^2$ b) $8\ u^2$ c) $12\ u^2$ d) $16\ u^2$

3. ¿Cuál es el volumen del sólido que se genera haciendo girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $2y^2 = x^3$, el eje x y la recta $= 2$?

   a) $1/4\pi\ u^3$ b) $4\pi\ u^3$ c) $2\pi\ u^3$ d) $\pi\ u^3$

4. ¿Cuál es el volumen del sólido que se genera haciendo girar alrededor del eje y la región limitada por la curva $y = x^3$, el eje x y la recta $x = 2$?

   a) $65\pi\ u^3$ b) $(64/5)\pi\ u^3$ c) $(65/4)\pi\ u^3$ d) $45\pi\ u^3$

5. ¿Cuál es la longitud del arco de la parábola $y = \frac{1}{6}x^2$ desde (0, 0) hasta (4, 8/3).

   a) 4.98 u b) 4.89 u c) 5.19 u d) 3.14 u

6. ¿Cuál es el área del sólido que se genera haciendo girar alrededor del eje y la región limitada por la curva $y = x^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$?

   a) $4\pi\ u^2$ b) $3.5\pi\ u^2$ c) $(13/3)\pi\ u^2$ d) $(15/4)\pi\ u^2$

BIBLIOGRAFÍA

Ayres Frank, Jr. y Elliot Mendenlson (2001). *Cálculo. Schaum*. México, McGraw-Hill Interamericana.

Garanville, William Anthony (1981). *Cálculo diferencial e integral*. 4ª ed. México, Limusa.

Salazar Vázquez, Pedro y Jesús Lozada Hernández Jesús (1997). *Matemáticas VI*. México, SEC.

Stewart, J. (2001). *Cálculo, conceptos y contextos*. México, Thomson Learning.

Swokowski, Earl W. y Yeffrey A. Cole (1997). *Cálculo con geometría analítica*. México, Iberoamericana.

Zill, Deniss G. (1987). *Cálculo con geometría analítica*, México, Iberoamericana.

Prepárate para la prueba ENLACE y el examen de ingreso a la universidad

Contesta exclusivamente la hoja de respuestas que se anexa al final de esta prueba, seleccionando la opción correcta de cada reactivo.

1. Es el resultado de la operación $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\right]+\left[\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\right]$ es:

   a) 4/5 b) –4/5 c) 7/4 d) –7/4 e) –5/4

2. Es el resultado de la operación $\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^2\left(\frac{9}{5}\right)\right]^3+\left[\frac{6}{5}-\frac{3}{2}\right]\sqrt{36}+2\left(3^2-7^2\right)$ es:

   a) 125/243 b) 5/9 c) 243 d) 216/5 e) 368/729

3. ¿Cuál lista muestra los números $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ ordenados de mayor a menor?

   a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ c) $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$ d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{8}, \frac{4}{5}, \frac{3}{3}$

4. ¿Qué resultado se obtiene al convertir 30° 30 ’ 15 ” a radianes?

   a) 0.5324 rad b) 0.5288 rad c) 1736.14 rad d) 0.2448 rad e) 0.0543 rad

5. La raíz cúbica de 125 es:

   a) –5 b) –25 c) 62.5 d) 5 e) 12.5

6. Simplifica la expresión $\sqrt{625}$.

   a) 25 b) 25^2 c) $\sqrt{25}$ d) 312.5 e) $5\sqrt{125}$

7. ¿Cuál expresión es correcta, si $a > b$, con a, b y c números reales?

   a) $a < b$ b) $a > b + c$ c) $a + c > b + c$ d) $a > bc$ e) $ac < b + c$

8. La suma de los tres ángulos exteriores de cualquier triángulo es:

   a) 360º b) 90º c) 180º d) 45º e) 270º

9. $8^{2/3}$ es igual a:

   a) 4 b) 8 c) 16 d) 24 e) 32

10. La expresión $(2xy + 4x - 6y)^0$ es equivalente a:

    a) 0 b) 1 c) Infinito d) No definido e) xy

11. El área del círculo cuyo radio es 1/3 mayor que el otro cuyo diámetro es 30 cm es:

a) 400π cm^2 b) 40π cm^2 c) 1600π cm^2 d) 100π cm^2 e) 45π cm^2

12. La diagonal de un rectángulo de base 4 cm mide 5 cm ¿Cuál es su altura?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

13. La expresión $(-512)^{1/3}$ es igual a:

a) 8 b) –8 c) 12 d) –12 e) 170.6

14. La media aritmética de las calificaciones de un alumno es 8.4, si la suma de las calificaciones de todas sus materias es de 67.2. ¿Cuántas materias cursó el alumno?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

15. Tres amigos fueron a la dulcería. Miguel gastó \$27 y compró un caramelo y dos paletas. Luis gastó \$41 y compró un caramelo y dos chocolates ¿Cuánto gastó Hugo si compró un caramelo una paleta y un chocolate?

a) \$15 b) \$32 c) \$34 d) \$16 e) \$36

16. Un corredor clasificado da a otro una ventaja de 15 m. Si la velocidad del primero es de 8m/s y la del segundo es de 7m/s. ¿A que distancia de su lugar de arranque el segundo corredor será alcanzado por el primero.

a) 75 m b) 120 m c) 45 m d) 105 m e) 15 m

17. Una máquina elabora cierto número de piezas plásticas en relación lineal al tiempo que funcione. Si en 1 hora produce 4 piezas y en 3 horas 10 piezas, ¿cuántas piezas se fabrican en 2 horas?

a) 6 piezas b) 7 piezas c) 2 piezas d) 5 piezas e) 4 piezas

18. El total de empleados de base y eventuales en una empresa es 120, de donde 40 son eventuales. ¿A qué porcentaje del total equivalente el número de empleados de base?

a) 66.06% b) 66.66% c) 66% d) 33.33% e) 33%

19. Jorge tiene un terreno en forma cuadrada con un área de 289 m^2, que quiere emplear como corral. ¿Cuántos metros de alambre de púa tiene que comprar para poder cercar los cuatro lados?

a) 68 m   b) 72.25 m   c) 52 m   d) 76 m   e) 17 m

20. Una tienda de ropa ofrece el 40% de descuento en las camisas. Si Ricardo aprovecha la oferta comprando una camisa en $180.00, ¿cuánto se ahorro Ricardo en comparación al precio que tenía la camisa antes del descuento?

a) 108   b) 120   c) 450   d) 220   e) 300

21. La señora Clara le deja una nota a su hija Paola para que vaya al minisuper a comprar lo necesario para la cena. En la nota se tiene la siguiente tabla:

Producto	Cantidad requerida	Costo
Tortilla de harina	2 bolsas (10 pzas.)	$12.00 c/u
Queso de hebra		$60.00 kg
Jamón		$50.00 kg
Pan dulce	12 pzas.	$4.50 c/u

Si se le deja a Paola, un billete de $200.00 para realizar las compras. ¿Cuánto recibirá de cambio al realizar las compras?

a) $ 67.00   b) $ 73.50   c) $ 79.50   d) $ 91.50   e) $ 98.00

22. Una máquina elabora embases de plástico para refresco en relación lineal al tiempo que funcione. Si en 1 min produce 10 embases y en 5 min produce 50 embases. ¿Cuántos embases se fabrican en 1 horas?

a) 30 embases
b) 60 embases
c) 200 embases
d) 600 embases
e) 300 embases

23. Gabriela asiste a un congreso por 6 días al puerto de Cancún, para lo cual hace su equipaje con 3 faldas, 4 blusas y 2 sacos combinables entre sí y apropiados al clima que se pronostica. Si desea cambiarse cada día igual número de veces sin repetir la combinación, siendo esta de 3 piezas cada vez. ¿Cuántas veces podrá cambiarse al día?

a) 3   b) 4   c) 5   d) 6   e) 12

24. Karen gasta al comprar 10 dulces y 5 chicles de un mismo tipo respectivamente \$60.00 ¿Cuánto cuestan de estos, 2 dulces y 1 chicle?

a) \$ 5.00 b) \$ 6.00 c) \$ 10.00 d) \$ 12.00 e) \$ 15.00

25. Una llave llena completamente de agua un contenedor en 40 minutos, otra llena el mismo en 60 minutos; si no hay pérdida de líquido en el proceso. Otra llave, conectada para el desagüe, vacía el agua del contenedor lleno en 2 hrs. ¿Cuánto tardaría el contenedor vacío en llenarse si ambas llaves y el desagüe están abiertas al mismo tiempo?

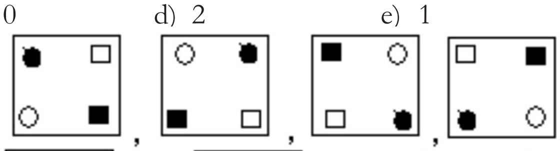
a) 10 minutos
b) 20 minutos
c) 30 minutos
d) 45 minutos
e) 60 minutos

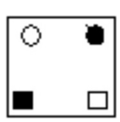
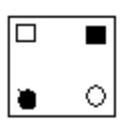
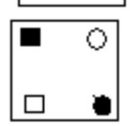
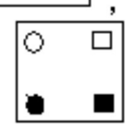
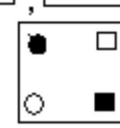
26. Un incendio ocurre en una papelería ubicada a 2 km al este y 5 km al sur de la estación de bomberos. El radio de afectación de la explosión es de 1 km. La ecuación que describe el perímetro de afectación de la explosión es:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 28 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 5y + 28 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 2x + 5y + 30 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 30 = 0$

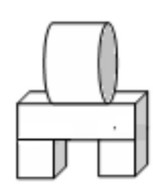
27. ¿Cuál es el radio de la circunferencia descrita por la ecuación $3x^2 + 3y^2 - 3 = 0$?

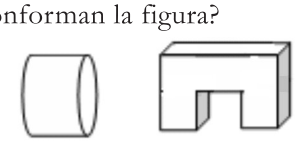
a) –3 b) 3 c) 0 d) 2 e) 1

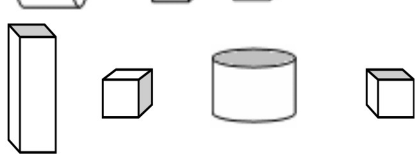
28. ¿Qué elemento da continuidad a la serie:  ?

a)  b)  c)  d)  e) 

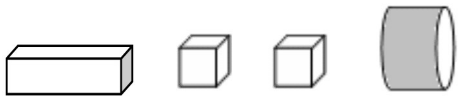
29. ¿Cuál es la opción que presenta el conjunto de cuerpos geométricos que conforman la figura?

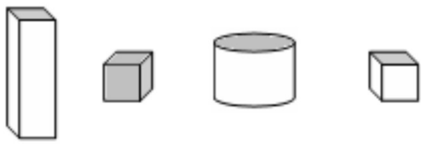


a) 

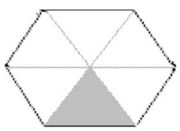
b) 

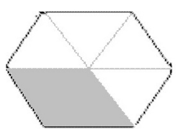
c) 

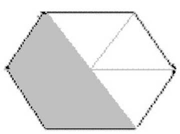
d) 

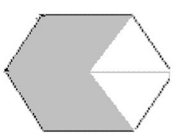
e) 

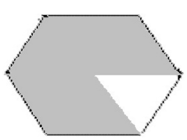
30. Karime está armando un rompecabezas en forma hexagonal. Si lleva armada la parte blanca que equivale a $\frac{15}{18}$, ¿cuál de las figuras representa la cantidad que lleva armada

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

31. ¿Qué número es el que sigue en esta sucesión: 1, 3, 6, 10, 15,

a) 21 b) 24 c) 40 d) 18 e) 36

32. ¿Qué número es el que sigue en esta sucesión: 2, 5,10, 17, 28, 41, …

a) 49 b) 55 c) 58 d) 56 e) 60

33. La factorización del trinomio $21x^2 + 8x - 45$ es:

a) $(3x + 5)(7x + 9)$
b) $(3x - 5)(7x - 9)$
c) $(3x + 5)(7x - 9)$
d) $(3x + 15)(7x - 3)$
e) $(3x - 15)(7x + 3)$

34. ¿Cómo se representa algebraicamente "la diferencia de cubos?

a) $(a - b)^3$ b) $b^3 - a^3$ c) $3(a - b)$ d) $(a^3 - b^3)^3$ e) $a^3 - b^3$

35. ¿Qué expresión resulta al desarrollar $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$?

a) $x^3 - 6$ b) $x^3 + 6$ c) $x^3 - 8$ d) $x^3 + 8$ e) $x^3 - 4x + 8$

36. ¿ Cuál es el resultado de simplificar $\frac{2x^2 - 9x - 5}{x - 5}$?

a) $2x + 1$ b) $2x - 1$ c) $-2x + 1$ d) $-2x - 1$ e) $x + 5$

37. Al multiplicar $(2x + 3y)$ $(2x - 3y)$ se obtiene:

a) $4x^2 + 6y^2$
b) $4x^2 - 6y^2$
c) $4x^2 - 12xy - 9y^2$
d) $4x^2 + 9y^2$
e) $4x^2 - 9y^2$

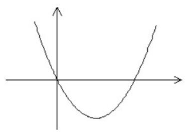
38. Al factorizar $x^3 - 27$ se obtiene:

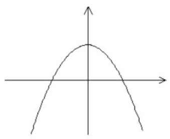
a) $(x - 3)$ $(x^2 - 3x + 9)$
b) $(x + 3)$ $(x^2 - 3x + 9)$
c) $(x + 1)(x^2 + 27)$
d) $(x + 1)(x^2 - 27)$
e) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

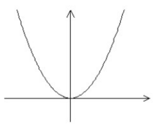
39. ¿Qué valores de x satisfacen la desigualdad $5x + 3 > 8x - 6$:

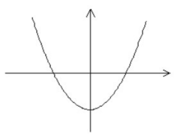
a) $x < 3$ b) $x > 3$ c) $x < -3$ d) $x > -3$ e) $x > -1$

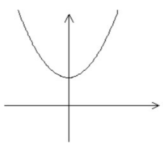
40. La gráfica de $f(x) = x^2$ es:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Hoja de respuestas

Nombre: ____

Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
7. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
8. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
9. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
22. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
23. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
24. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
25. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
27. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
28. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
29. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
30. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
31. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
32. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
33. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
34. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
35. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
36. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
37. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
38. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
39. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
40. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ